

P.F.QƏHRƏMANOV, N.T.QURBANOV

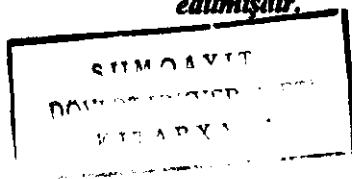
HƏNDƏSƏ

I HİSSƏ

ANALİTİK HƏNDƏSƏ

(DƏRS VƏSƏİTİ)

*Azərbaycan Respublikası Təhsil
Nazirliyi Elmi-Metodiki Şurası "Riya-
ziyyat" bölməsinin (19.10. 2007-ci il,
01/2007 sayılı protokolu) tövsiyyəsi və
nazirin 06.11.2007-ci il tarixli 1139 sayılı
əmrinə əsasən dərs vəsaiti kimi təsdiq
edilmişdir.*



SUMQAYIT – 2007

957/8

Kitaba rəy verənlər: professor Feyziyev F.G.
professor Əliyev N.Y.

Elmi redaktor: dosent Hüseynov Z.Q.
dosent Aliyev X.H.

Redaktor: dosent Mustafayev V.A.

Dərs vəsaiti həndəsənin elə bir sahəsinə həsr olunmuşdur ki, burada cəbrin köməyi ilə koordinatlar metodu və vektor hesabı tətbiq edilərək öyrənilir. Dərs vəsaitində koordinatlar sistemi və bu sistemlərdə həndəsi fiqurların tədqiqinə geniş yer verilmişdir.

Dərs vəsaiti bu sahədə çalışan bakalavr və magistr tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

GİRİŞ

Kitab müəlliflərin Sumqayıt Dövlət Universitetinin riyaziyyat, fizika və digər fakültələrinin tələbələrinə uzun illər ərzində "Həndəsə" kursundan oxuduqları mühazirələr əsasında hal-hazırda tədris olunan proqrama uyğun olaraq yazılmışdır.

Dərsləyə daxil edilmiş materiallar riyaziyyat fakültəsinin tələbələri üçün nəzərdə tutulan "Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi", "Riyazi analiz" kurslarının proqramları nəzərə alınaraq seçilmişdir.

Analitik həndəsə sadəcə olaraq, həndəsənin elə bir sahəsidir ki, burada həndəsi fiqurlar cəbrin köməyi ilə koordinatlar metodu və vektor hesabı tətbiq edilərək öyrənilir. Koordinatlar metodunun mahiyyəti isə aşağıdakılardan ibarətdir:

Nöqtənin koordinatlarının köməyi ilə həndəsi fiqurlar ədədlər, tənliklər, bərabərsizliklər və yaxud onların sistemi ilə ifadə edilir.

Teoremlərin isbatında və məsələlərin həllində isə analitik metodlardan geniş istifadə olunur.

Analitik həndəsənin aksiomatik əsaslarına gəldikdə isə hazırkı dövrdə Evklid-Hilbertin çox mürəkkəb olan aksiomatikası əvəzinə Veylin vektor analayışına əsaslanan aksiomatikasından istifadə olunur.

Bu aksiomatikaya əsasən bir sıra həndəsi anlayışlar vektor fəzasının alt fəzaları ilə təyin oluna bilirlər. Bu isə düz xətt və müstəvi kimi bir çox anlayışları asanlıqla "Cəbri" anlayışlarla əvəz etmək imkanı verir.

Veyl aksiomlarına əsaslanmaqla nəinki Evklid həndəsəsini, həmçinin proyektiv həndəsəni, Labaçevski həndəsəsini, Rimanın elliptik həndəsəsini və digər həndəsə elmlərini asan metodlarla öyrənmək imkanı əldə olunur.

XIX əsrin sonlarından alman alimi F.Kleynin "Erlangen proqram"-ından başlayaraq hamıya aydın oldu ki, yuxarıda sadaladığımız həndəsə elmlərinin hamısı "Xətti cəbr" adlanan riyazi nəzəriyyənin ayrı-ayrı modellərindən ibarətdir. Ona görə də bir çox riyaziyyatçılar (məsələn: fransız riyaziyyatçısı G.Dyedonne) təklif etdilər ki, "Analitik həndəsə" adı "Cəbri həndəsə" ilə əvəz olunmalıdır.

Beləliklə, "Analitik həndəsə" elmində öyrənilən həndəsi obyektə qarşı müəyyən bir cəbri obyekt və yaxud cəbri obyektlər sistemi qoyulur. Həmin cəbri obyektlərin asanlıqla öyrənilə bilən xassələrinə görə həndəsi obyektin xassələri haqqında fikir söyləmək imkanı əldə olunur.

Yuxarıda qeyd olunanları nəzərə almaqla kitab universitetlərin tədris proqramlarına uyğun olaraq yazılmışdır və tam kursu əhatə edir. Kitabın sonunda hər fəslə aid məsələlər həlli nümunələri və müstəqil işləmək üçün

kifayət qədər məsələlər verilmişdir. Bu da tələbələrin kursu tam mənimsəməsinə və biliklərinin möhkəmlənməsinə kömək edir.

Kitab haqqında rəy və təkliflərini bildirən hər bir oxucuya müəlliflər öz dərin minnətdarlığını bildirir.

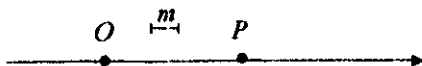
I FƏSİL

KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ.

§1. Koordinat sistemləri

1. Birölçülü koordinat sistemi.

Hər hansı bir l düz xətti götürüb bu düz xətt üzərində O nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtə vasitəsilə düz xəttin istənilən nöqtəsinin vəziyyətini təyin etmək olar. Məsələn: Düz xətt üzərində götürülmüş P nöqtəsinin vəziyyəti başlanğıcı O nöqtəsi olan istiqamətlənmiş OP parçası ilə tamamilə təyin olunur. Burada O -nöqtəsi birinci, P - nöqtəsi isə ikincidirsə, OP istiqamətlənmiş parça adlanır.



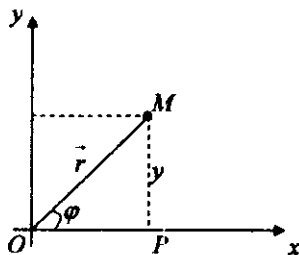
Deməli, l - düz xətti üzərində hər bir nöqtəyə bir istiqamətlənmiş parça uyğun gəlir. Əksinə düz xətt üzərində başlanğıcı O nöqtəsi olan hər bir istiqamətlənmiş parçaya bir nöqtə uyğun gəlir. Əgər xətt üzərində istiqamət və m miqyası seçsək, onda P nöqtəsinin vəziyyəti ədədlə və yaxud OP parçasının qiyməti ilə təyin olunur. Bu ədədə P nöqtəsinin koordinatı deyilir. Əgər koordinatı x ilə işarə etsək, onda P nöqtəsini $P(x)$ şəklində təyin edə bilərik.

Deməli, l düz xətti üzərində başlanğıc O nöqtəsi, istiqamət və miqyas təyin edilmişdirsə, onda deyirlər ki, l düz xətti üzrə birölçülü koordinat sistemi

müəyyən edilmişdir. O nöqtəsinə koordinat başlanğıcı deyirlər və onun koordinatı sıfıra bərabərdir. O nöqtəsi l düz xəttini iki yarımdüz xəttə bölür. Buradan görünür ki, hər bir x koordinatı l düz xətti üzərində bir nöqtəyə uyğundur və hər bir nöqtəyə bir x koordinatı uyğundur. Əgər birölçülü koordinat sistemində $A(x_1)$ və $B(x_2)$ nöqtələri verilmişdirsə, onda bu nöqtələr arasındakı məsafə $|AB| = |x_2 - x_1|$ bərabərliyi ilə hesablanır.

2. İkiölçülü dekart koordinat sistemi.

Əgər qarşılıqlı perpendikulyar iki düz xətt üzərində istiqamət və miqyas verilmişdirsə, deyirlər ki, ikiölçülü düzbucaqlı koordinat sistemi təyin edilmişdir. Ox oxu absis oxu, Oy oxu ordinat oxu adlanır. O nöqtəsi koordinat başlanğıcıdır və onun koordinatları sıfıra bərabərdir. Yəni $O(0;0)$; Ox və Oy oxları müstəvini dörd hissəyə bölür. Bu hissələr rübələr və yaxud kvadrantlar adlanır.

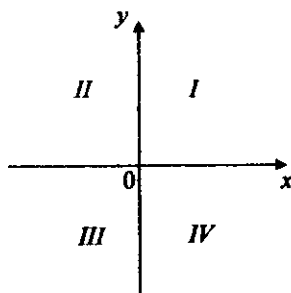


I rübdə $x > 0, y > 0$

II rübdə $x < 0, y > 0$

III rübdə $x < 0, y < 0$

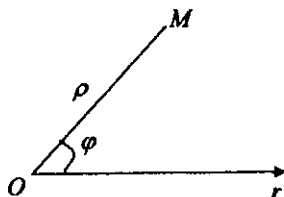
IV rübdə $x > 0, y < 0$



şərtləri ödənilir. Müstəvi üzərində nöqtənin vəziyyəti iki koordinat x və y dəyişənlərinin köməyi ilə təyin olunur və $M(x, y)$ şəklində işarə olunur.

3. Polyar koordinat sistemi.

Müstəvi üzərində nöqtənin vəziyyəti düzbucaqlı koordinat sistemindən başqa iki parametrlərin r və φ parametrlərinin köməyi ilə təyin edilir. Hər hansı bir r oxu götürüb onun üzərində O nöqtəsi qeyd edək və müstəvi üzərində ixtiyari M nöqtəsinin koordinatını təyin edək. Or oxuna polyar ox, φ bucağına polyar bucaq deyilir. O nöqtəsinə polyus deyilir.



$|OM| = \rho$ parçasına M nöqtəsinin radius vektoru deyilir. Deməli, M nöqtəsinin vəziyyəti müstəvi üzərində r və φ kəmiyyətləri ilə təyin edilir və bu zaman $M(r, \varphi)$ kimi işarə olunur. Qeyd edək ki, müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi ilə polyar koordinat sistemi arasında əlaqə var. Tutaq ki, polyar ox Ox oxu ilə, polyus isə koordinat başlanğıcı ilə üst –üstə düşür. Şəkildən görünür ki,

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

və yaxud

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \qquad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

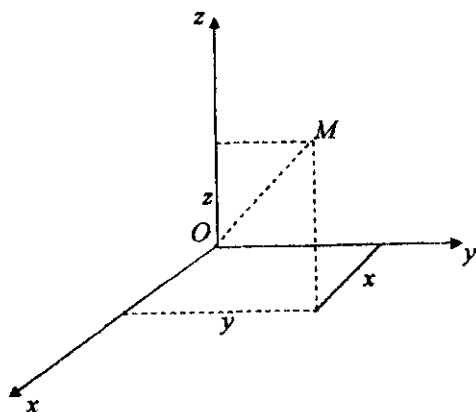
yazmaq olar. Bu düsturlardan görünür ki, polyar koordinat sistemində koordinat başlanğıcının koordinatları təyin olunmamışdır.

Qeyd edək ki, polyar koordinat sistemində adətən φ bucağı üçün $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ qəbul edilir. Ümumiyyətlə, $r \in (-\infty; +\infty)$ $\varphi = \alpha + 2\pi k$ götürülür.

4. Üçölçülü düzbucaqlı koordinat sistemi.

Qarşılıqlı perpendikulyar ortaq başlanğıca malik üç ox üzərində istiqamət və miqyas təyin olunmuşdursa, deyilir ki, üçölçülü düzbucaqlı koordinat

sistemi təyin olunmuşdur. Ox oxu absis, Oy oxu ordinat, Oz oxu aplikat adlanır. Fəzada ixtiyari nöqtənin vəziyyəti x, y, z koordinatları ilə tamamilə təyin olunur və $M(x, y, z)$ kimi yazılır. Əgər koordinat sisteminin saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə fırlatdıqda (ən qısa yolla) koordinat oxları üst-üstə düşərsə bu sistem sağ, əks halda isə sol koordinat sistemi adlanır. XOZ, XOY, YOZ müstəviləri fəzanı 8 hissəyə bölür. Bu hissələr oktantlar adlanır.



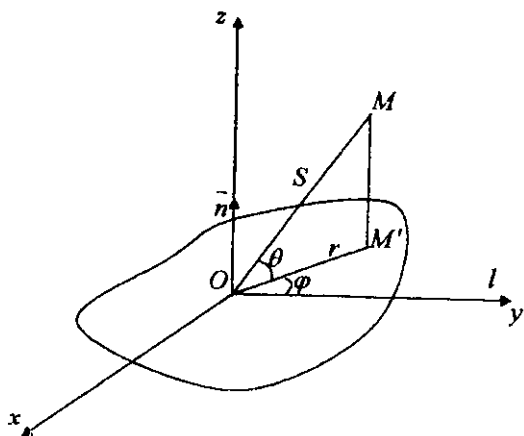
Qeyd edək ki, koordinatların dəyişənlərinin sayı üçdən böyük olduqda həmin koordinat sistemini həndəsi olaraq təsəvvür etmək mümkün olmur. Buna baxmayaraq riyaziyyatda n -ölçülü koordinat sistemindən də istifadə edilir.

§2. SİLİNDİRİK VƏ SFERİK KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ.

Üçölçülü fəzada silindirik və sferik koordinat sistemində ixtiyari nöqtənin vəziyyətini birqiymətli təyin etmək mümkündür. Bu kooordinat sistemlərinə,

yəni silindirik və sferik koordinat sistemlərinə ümumiləşmiş polyar koordinat sistemləri də deyilir və riyazi fizikanın, mexanikanın və digər elmlərin məsələlərinin həllində istifadə edilir.

Fəzada ixtiyari M nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən π müstəvisinə MM' perpendikulyarını endirək və O nöqtəsi polyus, Ol oxu polyar ox olsun. M' nöqtəsinin radius vektorunu $\vec{r}$, polyar bucağını isə φ ilə işarə etsək, bu nöqtə π müstəvisində $M'(r, \varphi)$ şəklində təyin olunur. Əgər $\overline{MM'}$ vektorunun π müstəvisinin $\vec{n}$ normal vektoruna görə toplananını H ilə işarə etsək, M nöqtəsinin vəziyyəti (r, φ, H) ilə təyin olunur. Oz oxu $\vec{n}$ normal vektorundan keçdikdə isə M nöqtəsinin vəziyyətini (r, φ, z) ilə təyin edərik. Bu üçlüyə M nöqtəsinin silindirik koordinatları deyilir.



Əgər düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sisteminə baxsaq, (x, y, z) koordinatları ilə (r, φ, z) koordinatları arasında əlaqə

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}\quad (1)$$

düsturları ilə təyin olunur. Aydıncıdır ki, (1) düsturlarından (r, φ, z) dəyişənlərini

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x} \\ z &= z\end{aligned}$$

bərabərlikləri ilə təyin etmək olar.

Əgər M nöqtəsinin radius vektorunu $\rho = |\overline{OM}|$ və bu radius vektorun $\vec{r} = \overline{OM}$ vektoru ilə əmələ gətirdiyi bucağı θ ilə işarə etsək, nöqtənin sferik koordinatları (ρ, φ, θ) olar. Əgər (1) bərabərliyindən istifadə etsək, düzbucaqlı koordinatlarla sferik koordinatlar arasında əlaqəni

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \theta\end{aligned}$$

şəklində təyin etmək olar. Burada $0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ şərtləri ödənməlidir.

§3. ANALİTİK HƏNDƏSƏNİN SADƏ MƏSƏLƏLƏRİ.

1. Müstəvi üzərində iki nöqtə arasındakı məsafənin hesablanması.

Fərz edək ki, müstəvi üzərində iki $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$ nöqtələri verilib və

bu nöqtələr arasındakı məsafəni hesablayaq.

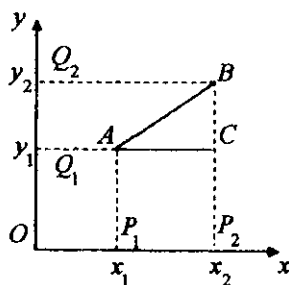
$$|AB| = d$$

olsun.

Aydındır ki,

$$|AC| = |P_1 P_2| = x_2 - x_1$$

$$|BC| = |Q_1 Q_2| = y_2 - y_1$$



Burada P_1 və P_2 uyğun olaraq A və B nöqtələrinin absis, Q_1 və Q_2 isə

ordinat oxları üzərində proyeksiyalarıdır. Onda şəkildən görünür ki,

$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

olar.

Yeni iki nöqtə arasındakı məsafə bu nöqtələrin eyniadlı koordinatlarının fərqlərinin kvadratları cəminin kvadrat kökünə bərabərdir.

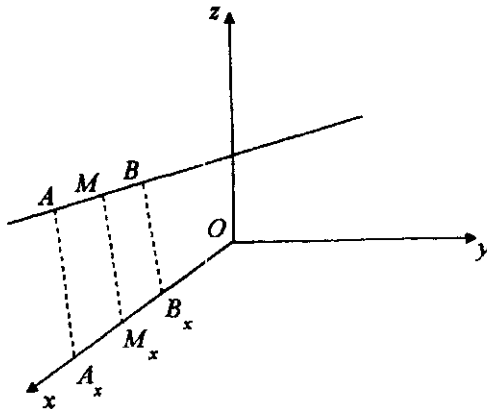
Əgər xüsusi halda $M(x, y)$ nöqtəsi ilə koordinat başlanğıcı arasındakı məsafə hesablanarsa, sonuncu düstur

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şəklində yazılır.

2. Parçanın verilmiş nisbətə bölünməsi.

Fərz edək ki, düzbucaqlı koordinat sisteminə iki $A(x_1, y_1, z_1)$ və $B(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilib. Əgər M nöqtəsi A və B nöqtələrindən keçən düz xətt üzərindədirsə və $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ şərti ödənərsə, onda M nöqtəsi $\overline{AB}$ parçasını λ nisbətində bölür deyirlər.



M nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. A, M və B nöqtələrinin Ox -u üzərində proyeksiyalarını uyğun olaraq A_x, B_x, M_x ilə işarə edək. Onda aydındır ki,

$$\frac{A_x M_x}{M_x B_x} = \lambda$$

şerti ödənilir.

Digər tərəfdən

$$\overline{A_x M_x} = x - x_1; \quad \overline{M_x B_x} = x_2 - x.$$

Onda

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

tənliyini alırıq. Əgər bu tənliyi x -ə görə həll etsək $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ alırıq. Eyni

qayda ilə $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ düsturlarını yazmaq olar. Deməli, bu

düsturlar vasitəsilə $\overline{AB}$ parçasını λ nisbətə bölən nöqtənin koordinatlarını hesablamaq olar.

Əgər $\lambda = 1$ olarsa, onda $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ alırıq. Bu o deməkdir ki, M

nöqtəsi $\overline{AB}$ parçasını yarıya bölür. Buradan aşağıdakı xassələr alınır:

- 1) $\lambda > 0$ olarsa, M nöqtəsi A və B nöqtələrinin arasında yerləşir.
- 2) $\lambda < 0$ olarsa, M nöqtəsi A və B nöqtələrinin xaricində yerləşir.

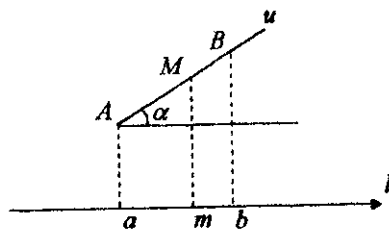
3) M nöqtəsi A nöqtəsinə yaxınlaşarsa, onda λ ədədi sıfıra yaxınlaşır.

4) M nöqtəsi B nöqtəsinə yaxınlaşarsa, onda $\lambda \rightarrow \infty$ olar.

5) $\lambda = -1$ olarsa, $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ bərabərliyi mənasını itirir.

3. Proyeksiya nəzəriyyəsinin elementləri.

Fərz edək ki, u düz xətti üzərində $\overline{AB}$ parçası və bu parçanın M nöqtəsi verilmişdir. u düz xəttinin l oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı α ilə işarə edək. M nöqtəsindən l oxuna perpendikulyar endirək və perpendikulyarın oturacağını m ilə işarə edək. Əgər M nöqtəsi $\overline{AB}$ parçası üzrə hərəkət edərsə, onda m nöqtəsi l oxu üzərində istiqamətlənmiş $\overline{ab}$ parçası cızır. Bu $\overline{ab}$ parçası $\overline{AB}$ parçasının l oxu üzərində ortoqonal proyeksiyası adlanır.



Deməli, başlanğıcı proyeksiyalanan parçanın başlanğıcının proyeksiyası, sonu isə həmin parçanın sonunun proyeksiyası olan istiqamətlənmiş parçaya həmin parçanın proyeksiyası deyilir və $pr_l \overline{AB} = \overline{ab}$ bərabərliyi ilə işarə olunur.

Şəkildən görünür ki,

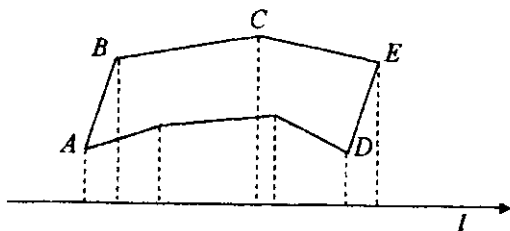
$$pr_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \alpha \quad (1)$$

Deməli, parçanın hər hansı bir l oxu üzərində proyeksiyası bu parçanın uzunluğu ilə ox arasında qalan bucağın kosinusunun hasilinə bərabərdir. Burada fərz etmişdik ki, $\overline{AB}$ parçasının istiqaməti ilə l düz xəttinin istiqaməti eynidir. Əgər $\overline{AB}$ parçasının istiqaməti l oxunun istiqamətinin əksinə olarsa, onda onlar arasında qalan bucaq $(\pi + \alpha)$ olar. Ona görə də $pr_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos(\pi + \alpha) = -\overline{AB} \cos \alpha$ olar. Deməli, $\overline{AB}$ -nin qiyməti $(-\overline{AB})$ -yə bərabər olduğundan

$$pr_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \alpha$$

alırıq.

Əgər hər hansı bir l oxu üzərində istiqamətlənmiş sınıq xəttin proyeksiyasını tapmaq lazımdırsa, sınıq xətti təşkil edən parçaların proyeksiyalarını cəmləmək kifayətdir.



Şəkildən görünür ki, sınıq xəttin proyeksiyaları onun başlanğıc və son nöqtələrinin vəziyyətindən asılıdır.

Başlanğıcı və sonu eyni olan sınıq xətlərin proyeksiyaları bərabərdir. Əgər sınıq xətt qapalıdırsa, yəni baxdığımız halda A və D nöqtələri üst-üstə düşərsə, onda proyeksiya sıfır bərabərdir.

Bu qaydadan istifadə edərək istiqamətlənmiş parçanın koordinat oxları üzərində proyeksiyasını tapmaq olar

Tutaq ki, müstəvi üzərində düzbucaqlı Oxy koordinat sistemində uzunluğu d və Ox oxu ilə meyl bucağı α olan $\overline{AB}$ parçası verilmişdir. Bu parçanın Ox və Oy oxları üzərində proyeksiyasını tapaq. Aydındır ki, proyeksiya $pr_x \overline{AB} = d \cos \alpha$; əgər Oy oxunu əvvəlcə $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qədər, sonra isə α qədər fırlatsaq, bu oxun müsbət istiqaməti $\overline{AB}$ parçasının istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Ona görə də

$$pr_y \overline{AB} = d \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = d \sin \alpha$$

olar.

Digər tərəfdən $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$ koordinatlarla təyin olunsay, onda proyeksiya

$$\begin{aligned} pr_x \overline{AB} &= |x_2 - x_1| \\ pr_y \overline{AB} &= |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

şəklində olur. Buradan isə

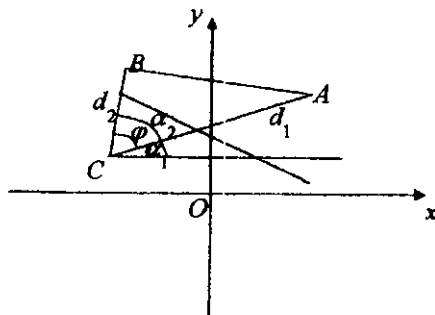
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

alınır.

Parçanın oxlar üzərində proyeksiyasından istifadə edərək, təpə nöqtələri verilmiş üçbucağın sahəsini hesablaya bilərik. Tutaq ki, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ və $C(x_3, y_3)$ nöqtələri ABC üçbucağının təpə nöqtələridir və

$$|AC| = d_1, |BC| = d_2, \angle ACB = \varphi$$

d_1 və d_2 tərəflərinin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq α_1 və α_2 ilə işarə edək.



Onda

$$S = \pm \frac{1}{2} |d_1 \cdot d_2 \sin \varphi| = \pm \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2)$$

olar. Burada

$$\begin{aligned} d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) &= d_1 d_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - d_1 d_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 = \\ &= d_1 \cos \alpha_1 d_2 \sin \alpha_2 - d_2 \cos \alpha_2 d_1 \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

ifadəsi doğrudur.

Digər tərəfdən

$$d_1 \cos \alpha_1 = x_1 - x_3$$

$$d_2 \sin \alpha_2 = y_2 - y_3$$

$$d_1 \sin \alpha_1 = y_1 - y_3$$

$$d_2 \cos \alpha_2 = x_2 - x_3$$

ifadələrini (2) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$S = \pm \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$$

alırıq.

Bu düstur vasitəsilə təpə nöqtələri koordinatlarla verilmiş üçbucağın sahəsini hesablamaq olar. Əgər C nöqtəsi koordinat başlangıcında yerləşərsə, onda $x_3 = y_3 = 0$ olar. Bu üçbucağın sahəsini hesablamaq üçün

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

düsturunu alırıq. Əgər A , B və C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşərsə, onda bu üçbucağın sahəsi $S = 0$ olar. Ona görə də

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| = 0$$

Buradan

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \quad (3)$$

alınır. (3) bərabərliyinə üç nöqtənin bir düz xətt üzərində yerləşməsi şərti deyilir.

II FƏSİL.

VEKTOR

§1. VEKTORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ SADƏ ƏMƏLLƏR.

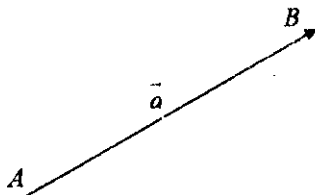
Təbiətdə kəmiyyətləri iki qrupa bölmək olar:

1. Skalyar kəmiyyət. Bu kəmiyyətlər yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunur. Məsələn: iş, enerji, kütlə və s.

2. Vektorial kəmiyyət. Bu kəmiyyətlər həm ədədi qiymətcə, həm də istiqaməti ilə xarakterizə olunur. Məsələn: qüvvə, çəki, sürət, təcil və s.

Vektorial kəmiyyətlər həndəsi olaraq istiqamətlənmiş parça ilə işarə olunur. Məsələn: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

Əgər $\overline{AB}$ yazsaq, A nöqtəsi vektorun başlanğıc, B nöqtəsi isə son nöqtəsi adlanır.



$\overline{AB}$ parçasının uzunluğuna vektorun uzunluğu və yaxud modulu deyilir və

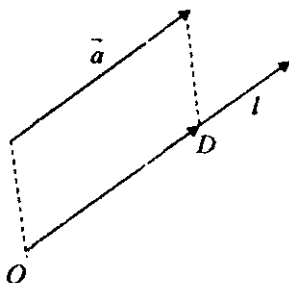
$|\overline{AB}|$ və yaxud $|\vec{a}|$ şəklində yazılır. Əgər vektorun başlanğıcı və sonu üst-üstə

düşərsə, belə vektora sıfır vektor deyilir və $\vec{0}$ kimi işarə olunur. Sıfır vektorun

uzunluğu sıfıra bərabərdir və istiqaməti qeyri-müəyyəndir. Sıfır vektoru $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$

şəklində təyin etmək olar. Əgər $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ vektorları eyni istiqamətlidirsə, $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD}$ şəkildə, bir-birinin əksinə yönəlmişsə, $\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD}$ şəkildə yazılır.

Hər hansı bir $\vec{a}$ vektoru verilmişdir və ixtiyari O nöqtəsi götürüb $\vec{a}$ vektoruna paralel l oxu çəkək. O nöqtəsində uzunluğu $\vec{a}$ vektorunun uzunluğuna bərabər olan $\overrightarrow{OD}$ vektorunu təyin edək. Bu halda deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru özünə paralel olaraq O nöqtəsinə köçürülmüşdür.

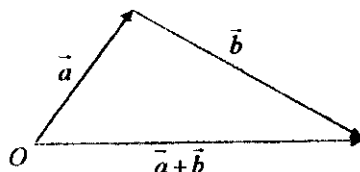


Eyni bir düz xətt və yaxud paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara kolleniar vektorlar deyilir. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardırsa, uzunluqları bərabərdirsə və eyni istiqamətlidirsə, onda bu vektorlara bərabər vektorlar deyilir $\vec{a} = \vec{b}$; Əgər vektorlar kolleniardırsa, uzunluqları bərabərdirsə və istiqamətləri əksdirsə, belə vektorlara əks vektorlar adlanır. $\vec{a}$ vektorunun əksi $(-\vec{a})$ vektorudur.

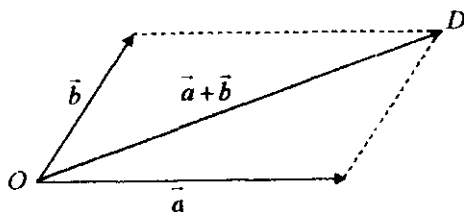
Vektorların toplanması və sabit ədədə vurulması vektorlar üzərində sadə əməllər adlanır.

1. Vektorların toplanması.

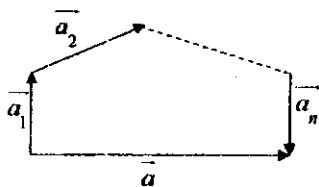
Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. İxtiyari bir O nöqtəsi götürüb $\vec{a}$ vektorunu bu nöqtəyə, $\vec{b}$ vektorunu isə $\vec{a}$ vektorunun sonuna köçürək. Onda başlanğıcı $\vec{a}$ vektorunun başlanğıcı, sonu isə $\vec{b}$ vektorunun sonu olan vektora həmin vektorların cəmi deyilir. Bu qayda vektorların toplanmasının üçbucaq qaydası adlanır.



İndi isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını toplamaq üçün onları hər hansı bir O nöqtəsinə köçürək. Bu vektorların uc nöqtələrindən digərinə paralel düz xətt keçirək. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsi D olsun, onda qurulmuş paraleloqramın diaqonalı həmin vektorların cəmidir. Bu qayda vektorların toplanmasının paraleloqram qaydası adlanır.



Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorları verilmişsə və bu vektorlar cəminin tapılması tələb olunursa, onda onları ardıcıl olaraq birini digərinin son nöqtəsinə köçürməklə sınıq xətt alırıq.



Bu sınıq xəttin qapayıcısı həmin vektorların cəmi olar. Yəni

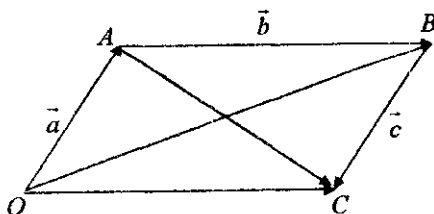
$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i.$$

Vektorların toplanması aşağıdakı xassələri ödəyir.

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 2) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- 4) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

4-cü xassəni isbat edək:

Bunun üçün $\vec{a}$ vektorunu hər hansı bir O nöqtəsinə köçürək. $\vec{b}$ vektoruna $\vec{a}$ vektorunun uc nöqtəsinə, $\vec{c}$ vektorunu isə $\vec{b}$ vektorunun son nöqtəsinə tətbiq edək və bu vektorların uc nöqtələrini A, B və C ilə işarə edək.



Şəkildən görünür ki,

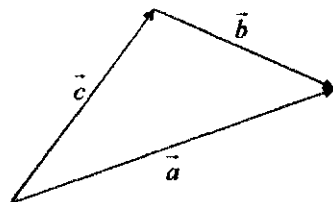
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

Son bərabərliklərin sağ tərəfi eyni olduğuna görə sol tərəfi də bərabər olar.

Yəni 4-cü xassə doğrudur. Eyni qayda ilə digər xassələri də isbat etmək olar.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının fərqi elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, $\vec{b}$ vektoru ilə topladıqda $\vec{a}$ vektoruna bərabər olur, yəni $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$



2. Vektorun ədədə vurulması.

Tutaq ki, bizə hər hansı bir λ sabiti və $\vec{a}$ vektoru verilmişdir. $\vec{a}$ vektorunun λ sabitinə hasili elə bir $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, bu vektor aşağıdakı xassələri ödəyir.

1) onun uzunluğu $|\lambda \vec{a}|$ -ya bərabərdir.

2) $\vec{a}$ ilə $\vec{c}$ kolleniardır.

3) $\lambda > 0$ olduqda bu vektor $\vec{a}$ vektoru ilə eyni istiqamətli, $\lambda < 0$ olduqda əks istiqamətli olur. Əgər $\lambda = 0$ olarsa, $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ olur və istiqaməti qeyri-müəyyəndir. Həndəsi olaraq $(\lambda \cdot \vec{a})$ hasilini o deməkdir ki, $\lambda > 1$ olduqda $\vec{a}$ vektoru λ dəfə uzanır. $0 < \lambda < 1$ olduqda isə λ dəfə qısalmır və istiqaməti hər iki halda $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eynidir. Əgər $\lambda < 0$ olarsa, bu vektorun istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqamətinə əksdir. Belə ki, $\lambda < -1$ olduqda vektor λ dəfə uzanır. $-1 < \lambda < 0$ olduqda isə λ dəfə qısalmır. Məsələn: $\vec{c} = 3\vec{a}$ olarsa, onda $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ vektorundan 3 dəfə uzundur. $\vec{c} = -3\vec{a}$ olarsa, onda $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ vektorundan 3 dəfə uzundur, lakin istiqaməti əksinədir.

Vektorun ədədə vurma hasilinin aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

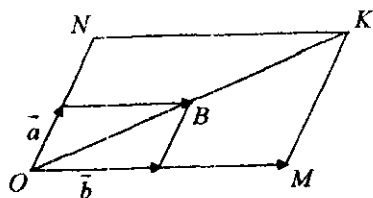
$$2) -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

$$3) \alpha, \beta \text{ ədədi üçün } (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \beta = \vec{a}(\beta \lambda) = (\alpha\beta)\vec{a} \text{ doğrudur.}$$

$$4) \text{İxtiyari } \alpha, \beta \text{ ədədi } \alpha \neq 0 \text{ vektoru üçün } (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \text{ doğrudur.}$$

$$5) \text{İxtiyari } \alpha \text{ ədədi və } \vec{a}, \vec{b} \text{ vektorları üçün } \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \text{ doğrudur.}$$

5-ci xassəni isbat edək: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını müstəvi üzərində ortaq bir O nöqtəsinə köçürək. Onda $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ olar. Əgər $\alpha\vec{a}$ və $\alpha\vec{b}$ vektorlarını da həmin nöqtəyə köçürsək, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ olar.



Başqa sözlə paraleloqramın tərəfləri α qədər uzandıqda onun diaqonalı da α qədər uzanır. İsbat olundu ki, 5-ci xassə doğrudur. Bu xassədən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

Teorem 1. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kolleniər olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \quad (1)$$

bərabərliyi ödəyən yeganə λ ədədinin olmasıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniərdir, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları eyni istiqamətli olduqda $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$ alırıq. Əks istiqamətli olduqda isə $\frac{\vec{b}}{\vec{a}} = \lambda < 0$ olar.

Deməli, hər iki halda λ ədədi var.

İndi isə isbat edək ki, bu ədəd yeganədir. Bunun əksini fərz edək. Fərz edək ki

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a} \quad (2)$$

bərabərliyi ödəyir. (1) bərabərliyindən (2) bərabərliyini çıxsaq

$$(\lambda - \lambda_1) \vec{a} = 0, \quad \vec{a} \neq 0$$

olduğundan

$$\lambda - \lambda_1 = 0$$

olur. Buradan isə

$$\lambda = \lambda_1$$

olmalıdır.

Yəni (1) bərabərliyini ödəyən λ ədədi yeganədir.

Tərif: Bir müstəvi və ya paralel müstəvilər üzərində olan vektorlara komplanar vektorlar deyilir.

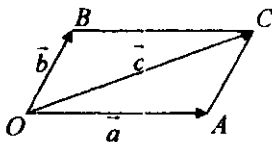
Teorem 2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ bərabərliyini ödəyən yeganə α və β ədədlərinin olmasıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{b} \neq \lambda \cdot \vec{a}$, yəni $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear deyil. Onda $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarını müstəvi üzərində hər hansı bir O nöqtəsinə köçürmək və

$$\vec{OA} = \alpha\vec{a}$$

$$\vec{OB} = \beta\vec{b}$$

yazmaq olar.



Digər tərəfdən

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

olduğundan

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

doğru olar.

İndi α və β ədədlərinin yeganəliyini isbat edək. Bunun üçün

$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$ qəbul edək. Əgər bu bərabərliyi (3) bərabərliyindən çıxsaq, onda

$$(\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} = 0$$

alırıq. Buradan isə

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \end{cases}$$

alınır. Yəni (3) bərabərliyini ödəyən α və β ədədləri yeganədir.

§2. VEKTORLAR SİSTEMİ.

Tutaq ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorları və $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədləri verilmişdir. Bu vektorlara vektorlar sistemi $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ cəminə isə vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası deyilir. Əgər $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədlərinin heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad (1)$$

olarsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemində xətti asılı olan vektorlar sistemi deyilir.

Əgər (1) bərabərliyi yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ olduqda ödənərsə, onda deyirlər ki,

$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil və yaxud həmin sistemə xətti asılı olmayan vektorlar sistemi deyilir.

Vektorlar sisteminin aşağıdakı xassələri var.

1) Əgər $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sisteminin heç olmasa vektorlarının biri sıfıra bərabər olarsa, onda bu sistem xətti asılıdır.

İsbatı: Tutaq ki, $\overline{a_1} = 0$. Onda $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} = 0$. Əgər bu bərabərlik ödənərsə, onda $\alpha_1 = 1 \neq 0$ ödəyir. Bu o deməkdir ki, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır.

2) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sisteminin ixtiyari bir hissəsi xətti asılıdırsa, onda bu sistemin özü də xətti asılıdır.

3) Vektorlar sisteminin özü xətti asılı deyilsə, onda bu sistemin ixtiyari bir hissəsi xətti asılı deyil.

4) Xətti asılı olmayan vektorlar sistemində sıfır vektor yoxdur.

Bu xassələrdən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

Teorem: İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt onların kolleniər olmasıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır. Onda

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \quad (2)$$

yaza bilərik. Buradan $1 \cdot \vec{b} - \lambda \cdot \vec{a} = 0$ alırıq və $1 \neq 0, \lambda \neq 0$ olarsa, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdır. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdır. Onda elə α və β ədədləri tapmaq olar ki, $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$ olar. Bu ədədlərdən biri $\alpha \neq 0$ olarsa, $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \vec{b}$ və yaxud $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$ olar. Sonuncu bərabərlik göstərir ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır.

Teorem: Üç $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorunun xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt onların komplanar olmasıdır.

İsbatı: (Zərurilik şərti) Tutaq ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları xətti asılıdır. Onların komplanar olduğunu göstərək. Əgər bu vektorlar xətti asılıdırsa, onda elə üç α, β və γ ədədləri tapmaq olar ki, $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$ şərti ödənər. Bu vektorlar xətti asılı olduğuna görə bu ədədlərin heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir.

Məsələn: Fərz edək ki, $\gamma \neq 0$.

Onda

$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \vec{a} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) \vec{b}$$

və yaxud

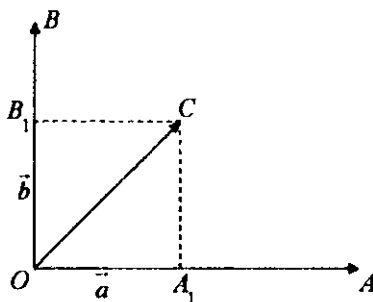
$$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$$

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{\gamma}, \lambda_2 = -\frac{\beta}{\gamma}$$

yaza bilərik.

Sonuncu bərabərlik göstərir ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardır.

(Kəfilik şərti) Tutaq ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardır və onların xətti asılı olduğunu isbat edək. Əgər bu vektorlar komplanardırsa, onda onları müstəvi üzərində hər hansı bir O nöqtəsinə köçürmək olar. Bu vektorları O nöqtəsinə köçürüb onların uc nöqtələrini uyğun olaraq A , B və C ilə işarə edək.



$\vec{c}$ vektorunun C uc nöqtəsindən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına paralel düz xətlər çəkək. Bu düz xətlərin vektorlarla kəsişmə nöqtələrini A_1 və B_1 ilə işarə edək, onda paraleloqram qaydasına görə $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$ yazmaq olar. $\overrightarrow{OA_1}$ vektorunun $\vec{a}$ vektoru ilə, $\overrightarrow{OB_1}$ vektorunun $\vec{b}$ vektoru ilə kolleniar olduğuna görə $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \vec{a}$; $\overrightarrow{OB_1} = \beta \vec{b}$ yazmaq olar. Əgər bunları son bərabərlikdə nəzərə alsaq, $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ və yaxud $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} - 1 \cdot \vec{c} = 0$ olar. Bu isə $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olduğunu göstərir.

Teorem: İxtiyari dörd vektor xətti asılıdır.

§3. VEKTORLAR FƏZASI. VEKTORLARIN BAZİSƏ GÖRƏ AYRILIŞI.

Bilirik ki, vektorların toplanması və ədədə vurulması uyğun olaraq

$$1) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$2) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$3) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$5) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

$$6) (\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \beta = (\alpha\beta) \vec{a}$$

$$7) \vec{a}(\alpha + \beta) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$8) \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

xassələri ödəyir. Burada α və β həqiqi ədədlər meydanının elementləridir. Boş olmayan və bu xassələri ödəyən vektorlar çoxluğuna vektorlar fəzası deyilir.

Müəyyən ardıcılıqla götürülmüş xətti asılı olmayan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemində vektorlar fəzasının bazisi deyilir. Bazis vektorların sayı fəzanın ölçüsünü təyin edir. Deməli, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemi aşağıdakı şərti ödəyir.

1. Bu sistem xətti asılı deyil.

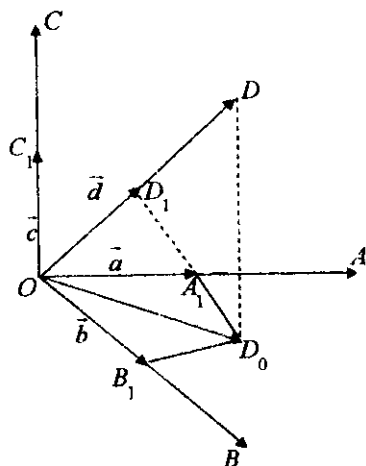
2. Fəzanın ixtiyari vektorunu bu vektorların kombinasiyası şəklində yazma bilirik. Bu vektorlar sisteminə Bazis vektorlar deyilir.

Məsələn: $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ bazis vektorları və bu fəzada $\vec{d}$ vektoru götürüb, onu bazis vektorların xətti kombinasiyası şəklində göstərək. Bu o deməkdir ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ bazis vektorları verilmişsə, elə α, β və γ ədədləri tapmaq olar ki, bu fəzadan götürülmüş ixtiyari $\vec{d}$ vektoru üçün

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (1)$$

bərabərliyini yazma bilirik.

İsbat: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ və $\vec{d}$ vektorlarını hər hansı bir O nöqtəsinə köçürək. Bu vektorların uc nöqtələrini uyğun olaraq A, B, C və D ilə işarə edək. $\vec{d}$ vektorunun uc nöqtəsindən $\overrightarrow{OC}$ vektoruna paralel düz xətt çəkək və bu düz xəttin OAB müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini D_0 ilə işarə edək. D_0 nöqtəsindən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına paralel düz xətlər çəkək.



Bu xətlərin $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə kəsişmə nöqtələrini B_1, A_1 ilə işarə edək.

Onda

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_0} + \overrightarrow{D_0D}$$

$$\overrightarrow{OD_0} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$$

olduğundan $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{D_0D}$ alarıq. $\overrightarrow{OA_1}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə, $\overrightarrow{OB_1}$

vektoru $\vec{b}$ vektoru ilə, $\overrightarrow{D_0D}$ vektoru $\vec{c}$ vektoru ilə kolleniar olduğuna görə

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{D_0D}$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \beta \vec{b}, \quad \overrightarrow{D_0D} = \gamma \vec{c}$$

yaza bilərik. Bu ifadələri və $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ olduğunu sonuncu bərabərlikdə nəzərə

alsaq,

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

bərabərliyini alarıq.

(1) bərabərliyinə $\vec{d}$ vektorunun $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı deyilir.

İndi isbat edək ki, vektorların bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı yeganədir.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, həmin bazisə görə

$$\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \quad (2)$$

ayrılışı var. Onda

$$(\alpha - \alpha_1) \vec{a} + (\beta - \beta_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} = 0$$

alarıq.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ bazis vektorlar olduğuna görə xətti asılı deyil. Ona görə də sonuncu bərabərliyin ödənməsi üçün

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \alpha_1 &= 0 \\ \beta - \beta_1 &= 0 \\ \gamma - \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

şərtləri ödənməlidir. Buradan isə

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$$

alınır.

Bu isə o deməkdir ki, vektorların bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı yeganədir. α, β və γ ədədləri $\vec{d}$ vektorunun $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bazislərinə nəzərən koordinatları adlanır və

$$\vec{d} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

şəklində yazılır.

(1) bərabərliyində $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ toplananları $\vec{d}$ vektorunun komponentləri adlanır. Əgər vektorlar öz koordinatları ilə verilmişdirsə, onda onları toplamaq və ya çıxmaq üçün eyniadlı koordinatları toplamaq və yaxud çıxmaq kifayətdir.

Məsələn: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ və $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ vektorları verilmişdirsə, onda

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

olar.

Koordinatları verilmiş vektorları sabitə vurduqda isə vektorların bütün koordinatları həmin ədədə vurulur.

Məsələn: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ və $\lambda = \text{const}$ verilmişdirsə, onda

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

bərabərliyi ödənilir.

Tutaq ki, vektorlar fəzası üçölçülü vektorlar fəzasıdır. Əgər bazis vektorların uzunluqları vahidə bərabərdirsə və onlar qarşılıqlı perpendikulyardırsa, belə bazisə ortonormal bazis deyilir. Ortonormal bazis adətən $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ilə işarə edilir. Deməli, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3|$ və $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$ şərtləri ödənərsə, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisinə ortonormal bazis deyilir. Bu bazisləri uyğun

olaraq, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ilə işarə edirlər. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisə nəzərən hər hansı $\vec{d}$ vektorunun ayrılışını

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{d}$$

şəklində yazmaq olar. İkiölçülü fəzada isə sonuncu bərabərliyi

$$\vec{d} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$$

kimi yazmaq olar.

§4. VEKTORUN OX ÜZƏRİNDƏ PROYEKSİYASI.

Fərz edək ki, $\vec{a}$ vektoru və hər hansı l oxu verilmişdir. Bu vektorların l oxu üzərində proyeksiyasını təyin edək.

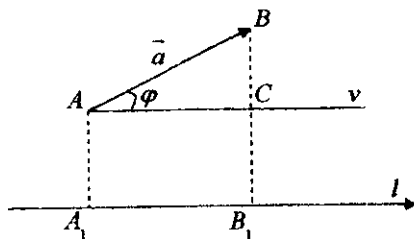
Teorem: Vektorun ox üzərində proyeksiyası onun uzunluğu ilə bu oxa meyli bucağının kosinusu hasilinə bərabərdir. Yəni: $\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərində proyeksiyasını $pr_l \vec{a}$ kimi işarə etsək

$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi \quad (1)$$

bərabərliyi doğru olar.

İsbati: $\vec{a}$ vektorunun uc nöqtələrindən l oxuna perpendikulyar endirək və bu perpendikulyarların oturacaqlarını A_l və B_l ilə işarə edək. $\vec{a}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsindən l oxuna paralel v oxunu çəkək. Onda φ bucağı $\vec{a}$

vektoru ilə v oxu arasında qalan və eyni zamanda l oxu arasında qalan bucaq olar.



İstiqamətlənmiş $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektoru $\vec{a}$ vektorunun v oxu üzərində proyeksiyasına, yəni $\overrightarrow{AC}$ vektoruna paralel olduğundan

$$pr_v \vec{AB} = \overrightarrow{AC} = |\vec{AB}| \cos \varphi$$

olar. Onda l və v oxları paralel olduğuna görə $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ isə $\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərində proyeksiyasıdır.

Ona görə də

$$|\overrightarrow{A_1B_1}| = \overrightarrow{AC} = pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

(1) bərabərliyi alınır.

Vektorların proyeksiyalarının aşağıdakı xassələri var.

1. Bir neçə vektorun cəminin proyeksiyası həmin vektorların verilən ox üzərində proyeksiyalarının cəminə bərabərdir, yəni

$$pr_l (\vec{a} + \vec{b}) = pr_l \vec{a} + pr_l \vec{b}$$

bərabərliyi doğrudur.

2. Vektoru sabit ədədə vurduqda onun proyeksiyası həmin ədədə vurulur, yəni $\vec{a}$ vektoru və $\lambda = \text{const}$ ədədi üçün

$$\text{pr}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{pr}_l \vec{a}$$

bərabərliyi ödəyir.

§5. VEKTORLARIN UZUNLUĞUNUN KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

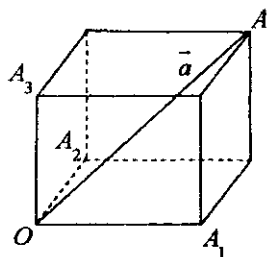
Fərz edək ki, $\vec{a}$ vektoru ortonormal koordinat sisteminə $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ koordinatı ilə verilmişdir.

Teorem: Ortonormal koordinat sisteminə $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu koordinatlarla

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorları olsun. $\vec{a}$ vektorunun uc nöqtəsini A ilə işarə edək. A nöqtəsindən XOY , XOZ və YOZ müstəvilərinə paralel müstəvilər keçirək və bu müstəvilərin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq A_1, A_2 və A_3 ilə işarə edək.



Onda alınmış cisim düzbucaqlı paralelepiped olduğundan vektorların toplanması qaydalarına əsasən

$$\vec{a} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}$$

yaza bilərik. Digər tərəfdən $\vec{OA_1} = a_x \vec{i}$, $\vec{OA_2} = a_y \vec{j}$ və $\vec{OA_3} = a_z \vec{k}$ olduğundan

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

olar. Alınmış cisim düzbucaqlı paralelepiped olduğu üçün

$$|\vec{OA}| = \sqrt{\vec{OA_1}^2 + \vec{OA_2}^2 + \vec{OA_3}^2}$$

yaxud

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

alırıq. Buradan isə (1) bərabərliyi alınır.

§6. VEKTORLARIN SKALYAR HASILI.

İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili bu vektorların uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir və $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ kimi işarə edilir.

Deməli, tərifə görə

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \quad (1)$$

yaza bilərik.

Əgər vektorun ox üzərində proyeksiyasından istifadə etsək

$$pr_a \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$pr_b \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

olduğuna görə (1) bərabərliyini

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| pr_a \vec{b}$$

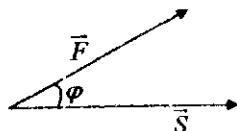
$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{b}| pr_b \vec{a}$$

şəklində yazmaq olar. Buradan görünür ki, iki vektorun skalyar hasili bu vektorların birinin uzunluğu ilə digərinin o biri vektordan keçən ox üzərində proyeksiyasının hasilinə bərabərdir.

Qeyd edək ki, iki vektorun skalyar hasili fiziki məsələlərin nəticəsidir.

Məsələn: Maddi nöqtəyə təsir edən F qüvvəsinin, gedilən S yerdəyişməsi zamanı gördüyü iş $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ düsturu ilə hesablanır.

Əgər təsir edən qüvvə yerdəyişmə ilə φ bucağı əmələ gətirirsə, onda bu qüvvənin S istiqaməti ilə üst-üstə düşən toplananın gördüyü iş $A = \vec{F} \cdot \vec{S} \cos \varphi$ düsturu ilə hesablanır.



Skalyar hasilin aşağıdakı həndəsi xassələri vardır:

1) İki vektorun ortoqonal olması üçün zəruri və kafi şərt onların skalyar hasilinin sıfıra bərabər olmasıdır.

Şərtin zəruriliyi: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ ortoqonal vektorlardır. Onda bu vektorlar arasında qalan bucaq $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\cos \varphi = 0$. Ona görə də (1) bərabərliyindən

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \quad (2)$$

alırıq. Yəni vektorların skalyar hasil: sıfıra bərabərdir.

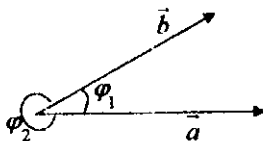
Şərtin kifiliyi: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasil: sıfıra bərabərdir və bu vektorların ortoqonal olduğunu isbat edək.

(1) bərabərliyindən görünür ki, (2) bərabərliyinin ödənməsi üçün ya bu vektorlardan biri, ya da hər ikisi sıfır olur. Onda (2) bərabərliyi ödənilir. Bu halda teorem isbat olunur.

İndi fərz edək ki, $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$. Bu halda (2) bərabərliyinin ödənməsi üçün

(1) bərabərliyindən $\cos \varphi = 0$ alınır və $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğuna görə vektorlar ortoqonaldır.

2) Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilı müsbət ədəddirsə, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları iti bucaq əmələ gətirir. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilı mənfi ədəddirsə, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kor bucaq əmələ gətirir.



İki vektorun skalyar hasilinin aşağıdakı cəbri xassələri var.

1) İki vektorun skalyar hasilı üçün

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$$

ödənilir. Doğrudan da, (1) bərabərliyindən istifadə etsək,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \varphi = (\vec{b} \cdot \vec{a})$$

alırıq.

2) İxtiyari $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Bu bərabərliyi isbat etmək üçün skalyar hasilin ikinci tərifindən istifadə edək.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

3) İxtiyari $\lambda = \text{const}$ ədədi və $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

şərti ödənilir.

Bu bərabərliyi də vektorların proyeksiyasından istifadə etməklə isbat etmək olar.

4) İxtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlik yalnız $|\vec{a}| = 0$ olduqda sıfıra bərabər olur.

Həmişə müsbət ədəddir və skalyar kvadrat adlanır. Onun doğruluğu skalyar hasildən $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ olduqda alınır. Bu bərabərlik göstərir ki, vektorun özünə

skalyar hasilı onun modulunun kvadratına bərabərdir.

§7. İKİ VEKTORUN SKALYAR HASILININ KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

Fərz edək ki, ortonormal bazisdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları koordinatları ilə

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

$$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

kimi verilmişdir.

Teorem: Ortonormal koordinat sistemində öz koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasili onların eyniadlı koordinatlarının hasilləri cəminə bərabərdir. Yəni:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ortonormal bazisdə koordinatları ilə verilmişdirsə, onda

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

ayrılışını yazı bilərik. Ona görə də çoxhədlinin çoxhədliyə vurulması qaydasına görə

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \dots + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + \dots + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k})$$

alırıq.

Burada

$$(\vec{i} \cdot \vec{i}) = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cos 0 = 1$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{j}) = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{k}) = 0$$

$$(\vec{j} \cdot \vec{k}) = 0$$

$$(\vec{j} \cdot \vec{j}) = 1$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1$$

bərabərlikləri ödənilir. Bu qiymətləri sonuncu bərabərlikdə nəzərə alsaq, həmin bərabərlikdə cəmiyyətli koordinatlar iştirak edən hədlərdən başqa bütün hədlər sıfıra bərabər olur. Başqa sözlə (1) bərabərliyi alınır. (1) bərabərliyindən və yaxud iki vektorun skalyar hasilindən istifadə edərək bu vektorlar arasındakı bucağı təyin etmək olar. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$$

şəklində təyin olunduğundan

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (1)$$

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları koordinatları ilə verilmişdirsə, onda (1) bərabərliyindən istifadə etməklə sonuncu bərabərliyi

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar. Deməli, koordinatları ilə verilmiş iki vektor arasındakı bucağı (2) düsturunun köməyi ilə təyin etmək olar. (2) düsturundan istifadə etməklə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının ortoqonalıq şərtini aşağıdakı kimi söyləmək olar.

Teorem: İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorların ortoqonal olması üçün zəruri və kafi şərt

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (3)$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

Fərz edək ki, ortoqonal koordinatlar sistemində $\vec{a}$ vektoru $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

koordinatlara malikdir. Koordinat sisteminin bazis vektorlarını $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ilə, $\vec{a}$ vektorunun bu bazis vektorları ilə əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq α, β və γ ilə işarə edək. Onda $\cos \alpha, \cos \beta$ və $\cos \gamma$ funksiyalarına $\vec{a}$ vektorunun yönəldici kosinusları deyilir. Yönəldici kosinusları təyin edək. Əgər $\vec{a}$ vektorunun koordinatları verilmişdirsə

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

alırıq. Bu bərabərliyin hər tərəfini skalyar olaraq $\vec{i}$ vektoruna vuraq.

$$(\vec{a} \cdot \vec{i}) = a_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_y (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_z (\vec{k} \cdot \vec{i})$$

Buradan

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cos \alpha = a_x$$

bərabərliyini alırıq. Bu bərabərlikdən

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

alınır. Eyni qayda ilə həmin bərabərliyi ardıcıl olaraq $\vec{j}, \vec{k}$ vahid vektorlarına vurmaqla

$$\cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

bərabərliklərini təyin etmək olar. Bu düsturlar vasitəsilə $\vec{a}$ vektorunun yönəldici kosinuslarını təyin edirik. Sonuncu bərabərlikləri kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplasaq

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

bərabərliyini alırıq. Deməli, ixtiyari vektorun yönəldici kosinuslarının kvadratları cəmi vahidə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, vektorun uzunluğu və yönəldici kosinusları verilmişdirsə, onda bu vektoru birqiymətli təyin etmək olar.

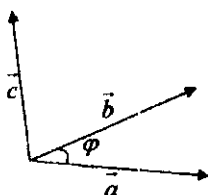
§8. İKİ VEKTORUN VEKTORİAL HASILI.

Fəzada sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasilı elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, bu vektor aşağıdakı şərtləri ödəsin:

1. $\vec{c}$ vektorunun uzunluğu $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabər olsun, yəni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$$

2. $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər biri ilə ortoqonal olsun
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları sağ üçlük təşkil etsin, yəni $\vec{c}$ vektorunun üç nöqtəsindən baxdıqda $\vec{a}$ vektorunu ən qısa yolla saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə fırlatdıqda $\vec{b}$ vektorunun üstünə düşsün. Əks halda $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları sol üçlük adlanır.



Vektorial hasil $(\vec{a} \times \vec{b})$ yaxud $[\vec{a}, \vec{b}]$ ilə işarə edilir. Deməli, tərifə görə

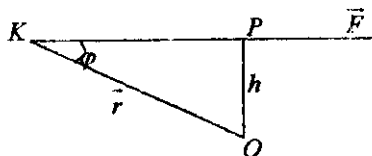
$$(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi \quad (1)$$

yazmaq olar və yalnız verilmiş vektorlardan biri yaxud hər ikisi sıfra bərabər olduqda və yaxud verilmiş vektorlar kolleniar olduqda sıfra bərabər olur.

Vektorial hasil mexaniki kəmiyyətlə, qüvvənin verilmiş nöqtəyə nəzərən momenti ilə əlaqəlidir. Doğrudan da, əgər $\vec{F}$ qüvvəsi hər hansı bir K nöqtəsinə tətbiq edilmişdirsə, onun O nöqtəsinə nəzərən momenti

$$M = OP \cdot \vec{F} = h\vec{F}$$

düsturu ilə hesablanır.



Digər tərəfdən

$$h = r \sin \varphi$$

olduğundan

$$M = r \cdot \vec{F} \sin \varphi$$

yaxud

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

yazmaq olar ki, bu ifadə $\vec{r}$ və $\vec{F}$ vektorlarının vektorial hasilidir.

Vektorial hasilin aşağıdakı həndəsi xassələri vardır.

1. İki vektorun kolleniər olması üçün zəruri və kafi şərt onların vektorial hasilinin sıfır bərabər olmasıdır.

Zəruriliyin isbatı: Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır və

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad (2)$$

olduğunu isbat edək. Əgər (2) şərti ödənirsə (1) bərabərliyindən

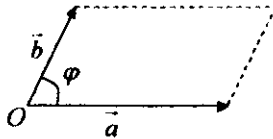
$$[\vec{a} \times \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

olar. Vektorlar kolleniardırsa $\varphi=0$, yaxud $\varphi=\pi$ olmalıdır. Hər iki halda $\sin 0=0$, $\sin \pi=0$ olduğundan (3) bərabərliyi ödənilir və (2) şərtinin ödənməsi deməkdir.

Kafiliyin isbatı: İndi isə (3) bərabərliyi ödəndikdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kolleniər olduğunu isbat edək. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər hansı biri və yaxud hər ikisi sıfır vektor olsa, onlar kolleniər olar. Şərtə görə $|\vec{a}| \neq 0$ və $|\vec{b}| \neq 0$. Yəni vektorlar sıfırdan fərqlidirlər. Ona görə də (3) bərabərliyinin ödənməsi üçün $\sin \varphi=0$ olmalıdır. Buradan isə $\varphi=0$ yaxud $\varphi=\pi$ qiymətləri alınır. Bu isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kolleniər olduğunu göstərir.

2. İki vektorun vektorial hasili ədədi qiymətcə, bu vektorları bir nöqtəyə köçürdükdə onlar üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabərdir, yəni

$$|(\vec{a} \times \vec{b})| = S$$



İsbatı: Verilmiş vektorları O nöqtəsinə köçürüb, birinin ucundan digərinə paralel düz xətlər çəksək paraleloqram alırıq.

Əgər $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \varphi$ olarsa, paraleloqramın sahəsi

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$$

olduğundan (1) düsturuna görə

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = S$$

olar.

Vektorial hasilin aşağıdakı cəbri xassələri vardır.

1. Vektorial hasildə vuruqların yerini dəyişdikdə işarə dəyişir, yəni

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

bərabərliyi ödəyir.

2. Vektorların vektorial hasilini ədədə vurmaq üçün, vuruqlardan birini bu ədədə vurmaq kifayətdir, yəni ixtiyari $\lambda = const$ ədədi, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \lambda \vec{b})$$

doğrudur.

3. Vektorial hasil paylama xassəsini ödəyir, yəni ixtiyari $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

ödəyir.

4. İxtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün

$$(\vec{a} \times \vec{a}) = 0$$

ödəyir.

Bu xassələrdən birincisini isbat edək.

Tutaq ki, $\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})$ və $\vec{d} = (\vec{b} \times \vec{a})$ -dır. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniər olsa $\vec{c} = \vec{d} = 0$ olar və xassə isbat olunar. Bu vektorlar kolleniər olmasa $(\vec{a} \times \vec{b})$ və $(\vec{b} \times \vec{a})$ vektorlarının uzunluqları bərabərdir və bu vektorlar kolleniərdirlər. Onda $\vec{c} = \vec{d}$ və yaxud $\vec{c} = -\vec{d}$ olmalıdır. Əgər $\vec{c} = \vec{d}$ olsa, həm $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları, həm də $\vec{b}$, $\vec{a}$ və $\vec{c}$ vektorları sağ üçlük təşkil edir. Bu isə mümkün deyil. Ona görə də $\vec{c} = -\vec{d}$ olmalıdır, yəni birinci xassə ödənilir.

Digər xassələri də eyni qayda ilə isbat etmək olar.

§9. VEKTORIAL HASILIN KOORDINATLARLA İFADƏSİ.

Əgər vektorlar düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları ilə verilmişdirsə, yəni $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ və $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ olarsa

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}; \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

yazmaq olar. Onda bu vektorların vektorial hasilini

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \{y_1 z_2 - z_1 y_2; x_1 z_2 - z_1 x_2; x_1 y_2 - y_1 x_2\} \quad (1)$$

vektoruna bərabərdir. Vektorial hasilin paylanma xassəsindən istifadə etsək, çoxhədlinin çoxhədliyə vurulma qaydasına görə

$$\begin{aligned}
[\vec{a} \times \vec{b}] = & (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + \\
& + y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k})
\end{aligned} \quad (2)$$

alarıq. $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyar vahid vektorlar olduğuna və göstərilən ardıcılıqla sağ üçlük təşkil etdiyinə görə

$$(\vec{i} \times \vec{i}) = 0; (\vec{j} \times \vec{j}) = 0; (\vec{k} \times \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{k}; (\vec{j} \times \vec{k}) = -\vec{j}; (\vec{j} \times \vec{i}) = -\vec{k}$$

$$(\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i}; (\vec{k} \times \vec{i}) = \vec{j}; (\vec{k} \times \vec{j}) = -\vec{i}$$

bərabərlikləri ödəyir. Bu qiymətləri (2) bərabərliyində nəzərə alıb vahid vektorlara nəzərən qruplaşdırsaq

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) + \vec{j}(z_1 x_2 - x_1 z_2) + \vec{k}(x_1 y_2 - y_1 x_2) \quad (3)$$

bərabərliyini alırıq. (3) bərabərliyindən görünür ki, koordinatları ilə verilmiş $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasilı koordinatları (1) şəklində təyin olunmuş vektordur. Digər tərəfdən (3) bərabərliyinin sağ tərəfi birinci sətir elementləri $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ vahid vektorlar olan üçtərtibli determinantın həmin elementlərə görə açılışdır. Ona görə də (3) bərabərliyini

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

şəklində yazmaq olar. Buradan görünür ki, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun vektorial hasilinin hesablanması üçtərtibli determinantın açılışdır.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniar olarsa, (3) bərabərliyindən

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0; \quad z_1 x_2 - x_1 z_2 = 0; \quad x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$$

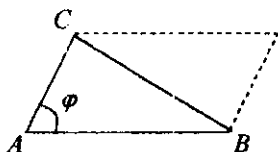
yaxud

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

bərabərlikləri alınır. Sonuncu bərabərlik iki vektorun kolleniarlıq şərtidir.

İki vektorun vektorial hasilindən istifadə edərək təpə nöqtələri $A(x_1, y_1, z_1)$,

$B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ olan üçbucağın sahəsini hesablamaq olar.



Doğrudan da,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \\ \overline{AC} &= \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}\end{aligned}$$

olduğundan üçbucağın sahəsi onun tamamlandığı paraleloqramın sahəsinin yarısına bərabər olduğuna görə

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{par} = \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sin \varphi = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

bərabərliyini yazmaq olar. Vektorial hasildən istifadə etsək

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) = \left\{ \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\}$$

olduğuna görə

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

bərabərliyini alırıq. Deməli sonuncu bərabərliyin köməyi ilə təpə nöqtələri verilmiş fəza üçbucağının sahəsini hesablamq olar. Əgər təpə nöqtələri verilmiş üçbucaq müstəvidə yerləşirsə, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ olduğuna görə bu üçbucağın sahəsini hesablamaq üçün

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

düsturunu alırıq.

§10. ÜÇ VEKTORUN QARIŞIQ HASILI.

Əgər $R = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koordinat sistemində sıfırdan fərqli $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları verilmişdirsə, $\vec{a}$ vektorunun $\vec{b}$ vektoruna vektorial hasilinin $\vec{c}$ vektoruna skalyar hasilinə bu vektorların qarışıq hasili deyilir və $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ və

yaxud $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$ kimi işarə edilir. Tərifdən görünür ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilinin $\vec{c}$ vektoruna skalyar hasili $\vec{c}$ vektoru ilə kolleniar olan vektordur.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasilinin $\vec{c}$ vektoruna həm vektorial, həm də skalyar hasili isə maraqlı nəticə verir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasili $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b})$ vektordur. Bu vektorun $\vec{c}$ vektoruna skalyar hasili, yəni $(\vec{d} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ qarışıq hasildir.

$\vec{d}$ vektorunun $\vec{c}$ vektoruna vektorial hasili isə ikiqat vektorial hasil adlanır və $(\vec{d} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ kimi işarə olunur.

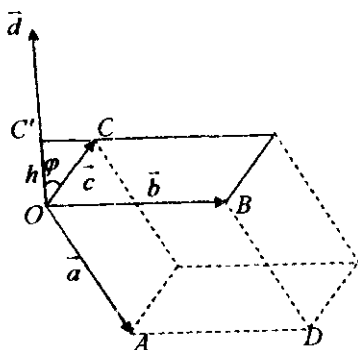
Qarışıq hasil aşağıdakı həndəsi xassələrə malikdir.

1. Üç vektorun qarışıq hasili ədədi qiymətə bu vektorları bir nöqtəyə köçürdükdə onlar üzərində qurulmuş paralelepipedin həcminə bərabərdir və vektorlar sağ üçlük olduqda müsbət, sol üçlük olduqda isə mənfidir.

İsbatı: Tutaq ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanar deyil. Onda $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b})$ vektorial hasili ədədi qiymətə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş $OADB$ paraleloqramın sahəsinə bərabərdir və istiqaməti bu vektorların yerləşdiyi müstəviyə perpendikulyardır, yəni

$$S_{OADB} = |(\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{d}| \quad (1)$$

bərabərliyi doğrudur.



Skalyar hasilin tərifinə görə $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{d} \cdot \vec{c})$ skalyar hasil $\vec{d}$ vektorunun uzunluğu ilə $\vec{c}$ vektorunun $\vec{d}$ vektorundan keçən düz xətt üzərində proyeksiyasının hasilidir. Deməli,

$$(\vec{d} \cdot \vec{c}) = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos \varphi = h \cdot |\vec{d}|$$

Onda

$$V = S_{ot} \cdot h = S_{OADB} \cdot h = |\vec{d}| \cdot h = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

olar. Burada $h = OC'$ paralelepipedin hündürlüyüdür. Əgər $\vec{d}$ və $\vec{c}$ vektorları arasındakı bucaq, yəni φ bucağı iti bucaq olarsa, paralelepipedin həcmi müsbət, kor bucaq olduqda isə mənfi götürülür. Başqa sözlə, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları bazis vektorlarla eyniadlı sistem təşkil etdikdə, hasilin işarəsi müsbət, müxtəlif adlı sistem təşkil etdikdə isə mənfi götürülür.

Əgər $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanar olarsa, paralelepipedin həcmi sıfıra bərabər olar.

2. Üç vektorun (məsələn $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$) komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt onların qarışıq hasilinin sıfıra bərabər olmasıdır.

Qarışıq hasilin aşağıdakı cəbri xassələri var.

1. İxtiyari üç sıfırdan fərqli $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (2)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbat: Skalər hasilin xassəsinə görə

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

bərabərliyi doğrudur. İndi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ bərabərliyinin doğruluğunu göstərək. Bu bərabərlikdə sağ və sol tərəf ədədi qiymətə həcm təyin edir və işarələri eynidir, yəni həm $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ üçlüyü, həm də $\vec{b}$, $\vec{c}$ və $\vec{a}$ üçlüyü sağ üçlük təşkil edir. Yəni son bərabərlik doğrudur. Deməli, (2) bərabərliyi ödənilir.

2. Əgər qarışıq hasilə ixtiyari iki vektor kolleniar olarsa, qarışıq hasil sıfıra bərabərdir.

3. Qarışıq hasil vuruqlarının dairəvi yerdəyişməsi onun qiymətini dəyişmir.

İki qonşu vuruğun yerdəyişməsi isə onun işarəsini dəyişir, yəni

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

bərabərliyi doğrudur.

§11. QARIŞIQ HASILIN KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

Fərz edək ki, vektorlar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$; $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ və $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$

şəklində koordinatları ilə verilmişdir.

Teorem: Koordinatları ilə verilmiş üç $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının qarışıq hasilini onların koordinatlarından təşkil olunmuş üçtərtibli determinanta bərabərdir, yəni

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Bilirik ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasilinin koordinatları ixtiyari ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazisində

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (2)$$

şəklində təyin olunur. Onda iki vektorun skalyar hasilinin koordinatlarla ifadəsinə əsasən $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektoru ilə $\vec{c}$ vektorunun skalyar hasilini

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Bu bərabərliyin sol tərəfi $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının qarışıq hasil, sağ tərəfi isə koordinatlardan təşkil olunmuş üçtərtibli determinantın (x_3, y_3, z_3) sətir elementlərinə görə açılışdır, yəni son bərabərlik

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

bərabərliyədir. Bu düsturdan istifadə etdikdə görünür ki, verilmiş $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının komplanarlığının zəruri və kafi şərti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

şəklində təyin oluna bilər. Üç vektorun qarışıq hasilindən istifadə edərək təpə nöqtələri $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ və $D(x_4, y_4, z_4)$ olan tetraedrin həcmi hesablamaq olar. Əgər təpə nöqtələri verilmiş nöqtələr olan tetraedri paralelepipedə tamamlasaq $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ və $\overline{AD}$ vektorlarına bir təpədən çıxan üç tillər kimi baxsaq paralelepipedin həcmi qarışıq hasilin mütləq qiymətinə bərabər olar, yəni

$$V_{par} = \left| (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} \right|$$

olar. Ona görə də piramidanın həcmi

$$V_{pir} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

yaxud

$$V_{pir} = \frac{1}{6} V_{par}$$

olar. Burada

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \\ \overrightarrow{AC} &= \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\} \\ \overrightarrow{AD} &= \{x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1\}\end{aligned}$$

olduğundan sonuncu bərabərliyi koordinatlarla

$$V_{pir} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

şəklində yazmaq olar. Bu düsturun köməyi ilə təpə nöqtələri verilmiş piramidanın həcmi hesablamaq olar.

§12. İKİQAT VEKTORIAL HASIL.

Əgər $R = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ koordinat sistemində verilmiş sıfırdan fərqli $\vec{a}$, $\vec{b}$ və

$\vec{c}$ vektorlarının $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektorial hasilini $\vec{c}$ vektoruna vektorial vursaq alınmış

nəticəyə ikiqat vektorial hasil deyilir və $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ kimi işarə edilir.

Teorem: İkiqat vektorial hasilı hesablamaq üçün ortadakı vektoru kənarlarda olan vektorların skalyar hasilinə vektorial vurub alınan nəticədən mötərizədən kənar vektorun digər iki vektorun skalyar hasilinə vektorial hasilini çıxmaq lazımdır. Yəni

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \times (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Verilmiş bazisdə $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektorlarının proyeksiyalarını təyin edək.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \{y_1 z_2 - z_1 y_2; z_1 x_2 - x_1 z_2; x_1 y_2 - x_2 y_1\} \quad (2)$$

Burada

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1); \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

qəbul edilmişdir. Əgər ikiqat vektorial hasilı $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ ilə işarə etsək və

$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ götürsək, $\vec{d}$ vektorunun koordinatlarını aşağıdakı kimi təyin edə

bilərik. Belə ki, (1) bərabərliyinə görə

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_x \cdot z_3 - (\vec{a} \times \vec{b})_z \cdot y_3 &= (z_1 x_2 - x_1 z_2) z_3 - (x_1 y_2 - x_2 y_1) y_3 = \\ &= x_2 (z_1 z_3 + y_1 y_3) - x_1 (z_2 z_3 + y_2 y_3) \end{aligned}$$

olar. Bu bərabərliyin sağ tərəfinə $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ hasilini əlavə edib və çıxsaq:

$$d_x = x_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - x_1(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)$$

yaxud

$$d_x = x_2(\vec{a} \cdot \vec{c}) - x_1(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (3)$$

alırıq. Eyni qayda ilə d_y və d_z proyeksiyaları üçün

$$d_y = y_2(\vec{a} \cdot \vec{c}) - y_1(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (4)$$

$$d_z = z_2(\vec{a} \cdot \vec{c}) - z_1(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (5)$$

bərabərliklərini təyin etmək olar. Onda $\vec{d}$ vektorunu

$$\vec{d} = d_x \vec{e}_1 + d_y \vec{e}_2 + d_z \vec{e}_3 \quad (6)$$

şəklində təyin edirik. Əgər (6) bərabərliyində (3), (4) və (5) bərabərliklərini yazsaq

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{e}_1 x_2 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{e}_1 x_1 (\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{e}_2 y_2 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{e}_2 y_1 (\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{e}_3 z_2 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{e}_3 z_1 (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= (\vec{e}_1 x_2 + \vec{e}_2 y_2 + \vec{e}_3 z_2) \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 y_1 + \vec{e}_3 z_1) \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

və yaxud

$$\vec{d} = \vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (7)$$

bərabərliyini alırıq. Əgər

$$\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

olduğunu və qarışıq hasildən istifadə etsək (7) bərabərliyindən (1) bərabərliyi alınar.

Qeyd edək ki, ikiqat vektorial hasilə vektorların dairəvi yerdəyişməsi müxtəlif vektorlar təyin edir, yəni

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} := \vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} := \vec{c} \times (\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{b} \times (\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} := \vec{a} \times (\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{c} \times (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

bərabərlikləri doğrudur. Əgər bu bərabərlikləri toplasaq

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = 0$$

eyniliyini alarıq.

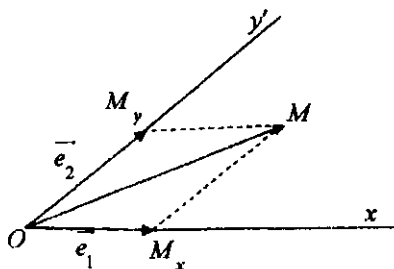
III FƏSİL

MÜSTƏVİDƏ AFİN KOORDİNAT SİSTEMİ.

§1. MÜSTƏVİNİN ORİYENTASIYASI.

Fərz edək ki, π müstəvisi verilmişdir. Bu müstəvi üzərində hər hansı bir O nöqtəsi və $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bazis vektorları götürək. Onda bu üçlüyə ümumiləşmiş dekart koordinat sistemi və yaxud afin koordinat sistemi deyilir. O nöqtəsi koordinat başlanğıcı $\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ vektorları isə koordinat vektorları adlanır. $\vec{e}_1$ ilə üst-üstə düşən oxu absis, $\vec{e}_2$ ilə üst-üstə düşən oxu ordinat oxu deyilir. Qeyd edək ki, afin koordinat sistemi $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kimi işarə olunur və bu sistmə bəzən afin reper də deyilir.

Müstəvi üzərində ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsi seçib onun afin koordinat sistemində nəzərən koordinatlarını təyin edək. Bu nöqtəni koordinat başlanğıcı ilə birləşdirək.



Onda alınmış $\overrightarrow{OM}$ vektoruna M nöqtəsinin radius vektoru deyilir. $\overrightarrow{OM}$ radius vektorun $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bazislərinə nəzərən koordinatlarına M nöqtəsinin afin

koordinat sistemində nəzərən koordinatları deyilir və $M(x, y)$ şəklində işarə edilir. Vektorlar cəbrindən məlumdur ki,

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \quad (1)$$

şəklində yeganə ayrılış var. Ona görə də $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ afin koordinat sistemində M nöqtəsinin (x, y) koordinatları yeganədir.

İndi fərz edək ki, afin koordinat sistemində (x, y) koordinatları verilmişdir və M nöqtəsinə tapmaq tələb olunur. Bunun üçün M nöqtəsindən koordinat vektorlarına paralel düz xətlər keçirək. Bu düz xətlərin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq M_x , M_y ilə işarə edək. Onda şəkildən görünür ki,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$$

olar.

Digər tərəfdən

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{e_1}; \quad \overrightarrow{OM_y} = y\overrightarrow{e_2}$$

olduğundan sonuncu bərabərlikdən (1) bərabərliyi alınır. Bu isə onu göstərir ki, (x, y) koordinatlara malik olan nöqtə M nöqtəsidir. Deməli, afin koordinat sistemində müstəvinin hər bir nöqtəsinə bir cüt (x, y) ədədi uyğundur və əksinə bir cüt (x, y) ədədinə müstəvi üzərində bir nöqtə uyğundur. Əgər Afin koordinat

sistemində bazis vektorları qarşılıqlı perpendikulyar və onların uzunluqları bərabər olarsa, yəni $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ və $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2|$ olarsa, onda bu sistemə düzbucaqlı dekart koordinat sistemi deyilir və $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ kimi işarə edilir. Afin koordinat sistemindən istifadə edərək üç nöqtənin sadə nisbətini təyin etmək olar.

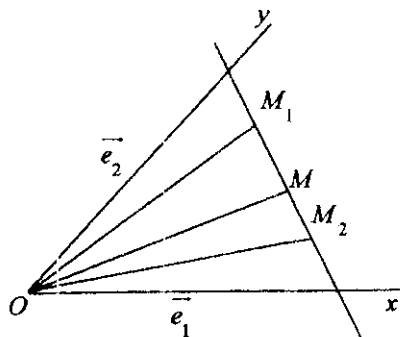
Fərz edək ki, müstəvi üzərində afin koordinat sistemində $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ və $M(x, y)$ nöqtələri verilmişdir.

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2} \quad (2)$$

şərtini ödəyən λ ədədinə M_1, M_2 və M nöqtələrinin sadə nisbəti deyilir və

$$\lambda = \lambda(M_1, M_2, M)$$

kimi yazılır.



Ayındır ki, $\overline{M_1M}$ və $\overline{MM_2}$ vektorlarının koordinatları

$$\begin{aligned} \overline{M_1M} &= \{x - x_1; y - y_1\} \\ \overline{MM_2} &= \{x_2 - x; y_2 - y\} \end{aligned}$$

olar. Onda (2) bərabərliyini koordinatlarla yazsaq,

$$\begin{aligned}x - x_1 &= \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y_1)\end{aligned}$$

bərabərliklərini yaxud

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (3)$$

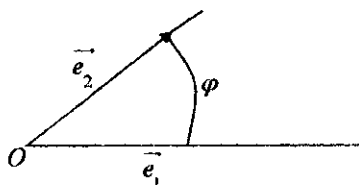
alırıq. (3) bərabərliyindən (x, y) koordinatlara malik olan nöqtə, yəni, M nöqtəsi $\overline{M_1 M_2}$ parçasını nisbətə bölən nöqtədir. Başqa sözlə, M nöqtəsi $\overline{M_1 M_2}$ parçasını λ nisbətə bölür. Əgər $\lambda = 1$ olarsa, (3) düsturundan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

alırıq. Bu isə o deməkdir ki, M nöqtəsi $\overline{M_1 M_2}$ parçasının orta nöqtəsidir. Fərz edək ki, hər hansı bir π müstəvidə çevrə götürülmüşdür. Əgər çevrə üzərində hərəkət istiqaməti müəyyən olunmuşdursa, onda deyirlər ki, müstəvi üzərində oriyentasiya təyin edilmişdir. Əgər çevrə üzərində hərəkət istiqaməti saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə qeyd olunmuşdursa, onda belə müstəvilərə sağ oriyentasiyalı müstəvilər deyilir. Çevrə üzrə hərəkət istiqaməti saat əqrəbi hərəkəti istiqamətindədirsə, onda müstəvi sol oriyentasiyalı müstəvi adlanır. Müstəvinin oriyentasiyasını bazis vektorlara görə də təyin etmək olar.

Fərz edək ki, müstəvi üzərində $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sistemi verilmişdir.

Əgər $\vec{e}_1$ bazisini $\vec{e}_2$ bazisinin üzərinə salmaq üçün ən qısa yolla O nöqtəsi ətrafında saat əqrəbi hərəkəti əksinə fırlatmaq lazımdırsa, onda $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bazisinə sağ oriyentasiyalı bazis və onların əmələ gətirdiyi $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koordinat sistemində sağ oriyentasiyalı koordinat sistemi deyilir.

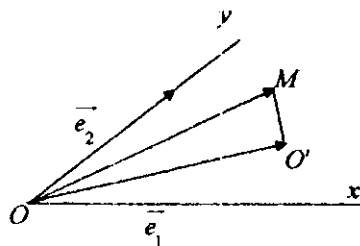


Əks halda isə $\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ bazis vektorlarına sol oriyentasiyalı bazis, əmələ gətirdiyi koordinat sistemində isə sol oriyentasiyalı koordinat sistemi deyilir. Müstəvini birinci halda sağ, ikinci halda sol oriyentasiyalı müstəvi adlandırırlar.

§2. AFİN KOORDİNAT SİSTEMİNİN AFİN KOORDİNAT SİSTEMİNƏ ÇEVİRİLMƏSİ.

Fərz edək ki, müstəvi üzərində $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\{O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ şəklində iki afin koordinat sistemi verilmişdir. Müstəvi üzərində ixtiyari M nöqtəsi götürüb bu

nöqtənin $[O, \vec{e}_1, \vec{e}_2]$ koordinat sistemində nəzərən koordinatlarını (x, y) ilə işarə edək. M nöqtəsinin $[O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2]$ koordinat sistemində nəzərən koordinatlarını isə (x', y') ilə işarə edək.



M nöqtəsinin bu koordinatları arasında əlaqə yaradaq. Yəni, M nöqtəsinin (x, y) koordinatları ilə (x', y') koordinatları arasındakı asılılığı təyin edək. Bunun üçün ikinci koordinat sisteminin $\vec{e}'_1$ və $\vec{e}'_2$ vektorlarının birinci koordinat sistemində nəzərən ayrılışını yazacağıq. Onda

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{12} \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= \alpha_{21} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2\end{aligned}$$

olar. $O(x_0, y_0)$ qəbul etsək, şəkildən görünür ki,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\ \overrightarrow{OO'} &= x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{OM} &= x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2\end{aligned}\tag{1}$$

bu qiymətləri (1) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$\begin{aligned}
x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 &= x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2 + \overline{O'M} \\
\overline{O'M} &= x'\bar{e}_1' + y'\bar{e}_2' \\
x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 &= x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2 + x'\bar{e}_1' + y'\bar{e}_2'
\end{aligned} \tag{2}$$

alırıq. Əgər $\bar{e}_1'$ və $\bar{e}_2'$ bazis vektorlarının $\bar{e}_1$ və $\bar{e}_2$ vektorlarına görə ayrılışlarını

(2) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = (x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y')\bar{e}_1 + (y_0 + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y')\bar{e}_2$$

olar. Son bərabərliyin sağ və sol tərəfləri vektorun ayrılışı olduğu üçün bu vektorların bərabərliyindən

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' \\ y &= y_0 + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

bərabərlikləri alınır. (3) bərabərliyinə afin koordinat sisteminin afin koordinat sistemində nəzərən çevrilməsi düsturları deyilir. Başqa sözlə, (3) düsturu M nöqtəsinin birinci koordinat sistemində nəzərən (x, y) koordinatları ilə ikinci koordinat sistemində nəzərən (x', y') koordinatları arasında əlaqə yaradır. Əgər (3) tənliklər sistemini x' və y' -ə nəzərən həll etsək, onda bu dəyişmələrin köhnə koordinatlarla yəni (x, y) ilə ifadəsini alırıq. (3) bərabərliyindən aşağıdakı xüsusi hallar alınır.

1) Əgər O nöqtəsi O' nöqtəsi ilə üst-üstə düşərsə, $x_0 = 0, y_0 = 0$

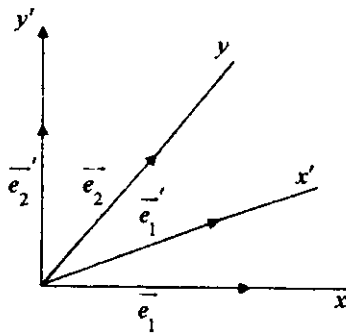
olduğundan (3) bərabərliklərini

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

şəklində yazı bilərik. (4) düsturları koordinat oxları koordinat başlanğıcı ətrafında döndükdə əvvəlki və sonrakı koordinatlar arasında əlaqə yaradır. Əgər yeni koordinat sistemi ilə əvvəlki koordinat sistemindən Ox oxu istiqamətində x_0 qədər, Oy oxu istiqamətində y_0 qədər paralel köçürmə nəticəsində alınmışdırsa, onda

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1', \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2'$$

olar.



Bu halda (3) düsturundan

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{22} = 1, \alpha_{21} = 0, \alpha_{12} = 0 \}$$

alınır. Ona görə də (3) düsturundan

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \end{aligned} \right\}$$

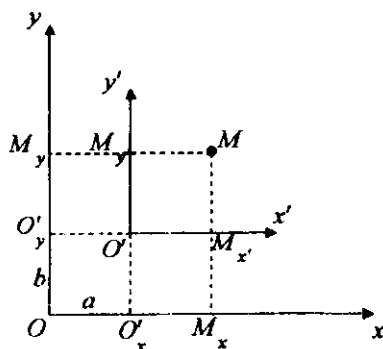
alırıq. Bu isə afin koordinat sisteminin paralel köçürməsi zamanı əvvəlki və sonrakı koordinatlar arasında əlaqə düsturudur.

§3. DÜZBUCAQLI KOORDINAT SİSTEMİNİN ÇEVİRİLMƏSİ.

Düzbucaqlı koordinat sisteminin çevrilməsi aşağıdakı sadə çevrilmələrin köməyi ilə yerinə yetirilir. Bunları ayrılıqda öyrənək:

1. Paralel köçürmə.

Fərz edək ki, Oxy düzbucaqlı koordinat sistemi verilmişdir. Bu koordinat sistemini Ox oxu istiqamətində a qədər, Oy oxu istiqamətində b qədər öz-özünə paralel köçürək. Onda alınmış $O'x'y'$ koordinat sisteminin koordinat başlanğıcının əvvəlki koordinat sisteminə nəzərən koordinatları (a, b) olar. Müstəvi üzərində ixtiyari bir M nöqtəsi götürək. Bu nöqtənin birinci koordinat sisteminə nəzərən koordinatları (x, y) , ikinci koordinat sisteminə nəzərən koordinatları isə (x', y') olsun. Bu koordinatlar arasında əlaqə yaradaq.



M nöqtəsinin koordinat oxları üzərində proyeksiyalarını təyin edək. Şəkildən görünür ki, $OM_x = x$, $O'M_{x'} = x'$. Digər tərəfdən $OM_x = OO'_x + O'_xM_{x'}$, $OO'_x = a$ olduğuna görə sonuncu bərabərlikdən $x = a + x'$ və yaxud $x = x' + a$ alırıq. Eyni qayda ilə $y = b + y'$ yazı bilərik. Bu düstur M nöqtəsinin birinci koordinatlarını ikinci koordinatları ilə ifadə edir. Bu düsturdan

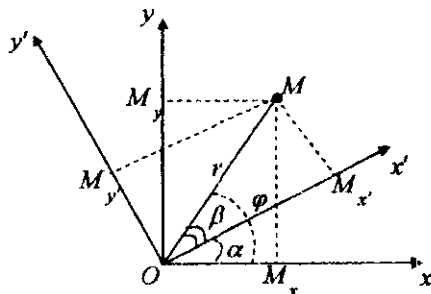
$$\left. \begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned} \right\}$$

yazmaq olar. Sonuncu düstur isə M nöqtəsinin yeni koordinatlarını birinci koordinatlarla ifadə edir.

2. Koordinat sisteminin mərkəz ətrafında dönməsi.

Fərz edək ki, Oxy düzbucaqlı koordinat sistemi verilmişdir. Ox oxunu α bucağı qədər koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə fırladaq. Onda yeni $O'x'y'$ koordinat sistemini alırıq. Müstəvi üzərində ixtiyari bir M nöqtəsi götürək. Bu nöqtənin birinci koordinat sistemində nəzərə

koordinatlarını (x, y) ilə, ikinci koordinat sisteminə nəzərən koordinatları isə (x', y') ilə işarə edək. Bu koordinatlar arasında əlaqə yaradaq. M nöqtəsinin polyar ox absis oxu ilə üst-üstə düşməsi şərtlə polyar koordinatları (r, φ) olsun.



Polyar ox yeni Ox' oxu ilə üst-üstə düşdükdə isə polyar koordinatları (r, β) olsa, şəkildən görünür ki, $\varphi = \alpha + \beta$ onda əvvəlki koordinat sistemində görə $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ yeni koordinat sistemində nəzərən $x' = r \cos \beta$, $y' = r \sin \beta$ yazmaq olar. Onda

$$x = r \cos \varphi = r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

və yaxud

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

olar.

Eyni qayda ilə

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

təyin etmək olar. Deməli,

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

yazmaq olar. Burada (1) düsturları koordinat sistemi koordinat başlanğıcı ətrafında fırlandığında əvvəlki koordinatlarla sonrakı koordinatlar arasında əlaqə yaradır. Başqa sözlə, əvvəlki koordinatları sonrakı koordinatlarla ifadə edir. Əgər (1) tənliklər sistemini (x', y') -ə nəzərən həll etsək, onda yeni koordinatları əvvəlki koordinatlarla ifadə edə bilərik. Lakin bu yerdəyişməni aşağıdakı kimi də yerinə yetirmək olar. Əgər Ox oxunu saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə α qədər döndərməklə Ox' oxunun müsbət istiqamətinin üzərinə düşərsə, onda Ox' oxunu $(-\alpha)$ qədər döndərsək, Ox oxu üzərinə düşər. Ona görə də (1) düsturlarında α -nı $(-\alpha)$ - ilə, x -i x' ilə, y -i y' ilə əvəz etsək

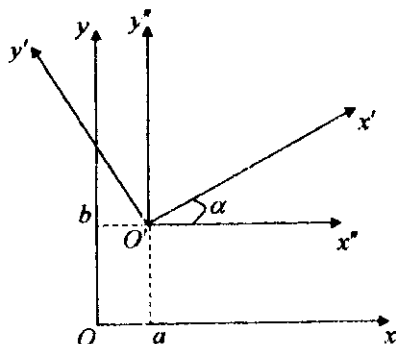
$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

alırıq. (2) düsturu yeni koordinatları əvvəlki koordinatlarla ifadə edir.

§4. DÜZBUCAQLI KOORDİNAT SİSTEMİNİN ÜMUMİ ÇEVİRİLMƏSİ.

Fərz edək ki, Oxy koordinat sistemi Ox oxu istiqamətində a qədər, Oy oxu istiqamətində b qədər paralel köçürülmüşdür və koordinat mərkəzi ətrafında α bucağı qədər döndərilmişdir. Müstəvi üzərində ixtiyari M nöqtəsi

götürüb onun Oxy koordinat sistemində koordinatlarını (x, y) , $O'x'y'$ koordinat sistemində koordinatlarını (x', y') işarə edək və bu koordinatlar arasında əlaqə yaradaq. Bunun üçün köməkçi $O'x''y''$ koordinat sistemi götürək və nöqtənin bu koordinat sistemində koordinatlarını (x'', y'') ilə işarə edək.



Ayındır ki, O' koordinat başlanğıcının koordinatları (a, b) -dir və $O'x''y''$ koordinat sistemi Oxy koordinat sisteminin paralel köçürülməsi nəticəsində alınmışdır. Ona görə də

$$\begin{cases} x = x'' + a \\ y = y'' + b \end{cases}$$

yaza bilərik. Digər tərəfdən $O'x''y''$ koordinat sistemi $O'x'y'$ koordinat sisteminin mərkəz ətrafında α bucağı qədər dönməsindən alındığına görə

$$\begin{cases} x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

yaza bilərik. Əgər bu qiymətləri sonuncu bərabərlikdə nəzərə alsaq

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{aligned} \right\}$$

olar. Deməli, bu düstur (x, y) koordinatlarını (x', y') koordinatları ilə ifadə edir.

Əksinə α - nı $(-\alpha)$ ilə əvəz etsək:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' &= -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

olar. Sonuncu düsturlar (x', y') koordinatlarını (x, y) koordinatları ilə ifadə edir.

Qeyd: (3) düsturu Oxy koordinat sistemi sağ koordinat sistemi olduğundan və onu $O'x'y'$ sağ koordinat sisteminə çevirəndə və yaxud Oxy sol koordinat sistemi olduqda və onu $O'x'y'$ sol koordinat sisteminə çevirdikdə doğrudur. Başqa sözlə, (3) düsturları Oxy və $O'x'y'$ koordinat sisteminin hər ikisi sağ və yaxud sol koordinat sistemi olduqda doğrudur. Əgər sağ koordinat sistemi sol koordinat sisteminə və yaxud sol koordinat sistemi sağ koordinat sisteminə çevrilirsə, onda (3) düsturları

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + a \\ y &= x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

şəklində yazılır.

IV FƏSİL

MÜSTƏVİDƏ DÜZ XƏTT

§1. MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ XƏTT.

Tutaq ki, π müstəvisində

1) Oxy koordinat sistemi

2) l xətti verilmişdir.

Bu xəttin nöqtələrinin koordinatları arasında olan əlaqə vasitəsilə xətti öyrənmək olar. Fərz edək ki, xəttin nöqtələrinin koordinatları arasında

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

əlaqəsi var. Əgər xəttin bütün nöqtələrinin koordinatları (1) tənliyini ödəyərsə və bu xətt üzərində olmayan heçbir nöqtənin koordinatları bu tənliyi ödəmirsə, onda (1) tənliyinə xəttin tənliyi deyilir. Başqa sözlə, (1) tənliyi xətti təyin edir.

(1) tənliyi ikidəyişənli tənlikdir. Ola bilər ki, ikidəyişənli tənlik müstəvi üzərində hər hansı həndəsi obrazı təyin edərsə və yaxud təyin etməz. Məsələn:

$x^2 + y^2 = 0$ tənliyi bir nöqtəni $(0, 0)$ nöqtəsini təyin edir. $x^2 + y^2 = 3$ tənliyi

radiusu $r = \sqrt{3}$ olan çevrəni təyin edir. $x^2 + y^2 + 7 = 0$ tənliyi müstəvi üzərində

heç bir həndəsi obrazı təyin etmir. Ona görə də (1) tənliyinin müstəvi üzərində

xətti təyin etməsi üçün $F(x, y)$ funksiyası müəyyən şərtləri ödəməlidir.

(1) tənliyi Oxy koordinat sistemində xəttin tənliyidir. Onu $\phi(r, \varphi) = 0$

şəklində yazmaq olar və xətt təyin edilir.

Qeyd: Xəttin tənliyinin koordinatları müxtəlif koordinat sistemində müxtəlifdir. Əgər (1) tənliyində (x, y) dəyişənləri birinci dərəcədən daxildirsə, onun təyin etdiyi xətt birtərtibli xətdir.

Ümumiyyətlə, (1) tənliyində dəyişənlərin dərəcəsi n olarsa, onun təyin etdiyi xəttə n tərtibli xətt deyilir. Əgər $y = f(x)$ funksiyası

$$P_0(x, y)y^n + P_1(x, y)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0$$

tənliyinin həllidirsə, onda onun təyin etdiyi xəttə cəbri xətt deyilir. Cəbri olmayan xətlərə transcendent xətlər deyilir. Burada $P_n(x, y)$ çoxhədlidir. Xətlərin ən sadəsi düz xətdir. Ona görə düz xətti öyrənək.

§2. DÜZ XƏTT.

Müstəvi üzərində Oxy koordinat sistemi və l düz xətti götürək. Bu verilənlərə əsasən düz xətlə bağlı iki məsələni həll etmək olar.

1. Müstəvi üzərində birdərəcəli ikidəyişənli $\Phi(x, y) = 0$ şəklində tənlik verildirsə, bu tənliyin təyin etdiyi düz xətti təyin etməli.

2. Oxy koordinat sistemində l xətti verilmişdirsə, bu xətti təyin edən tənliyi tapın.

Deməli, birinci halda tənlik verilir. Bu tənliyin təyin etdiyi xətt tapılır. Bu məsələni «Riəzi analiz» köməyi ilə həll edirlər.

İkinci məsələ isə, yəni, xətt verildikdə onun tənliyinin tapılması məsələsi «Analitik həndəsənin» məsələsidir. Koordinat üsulundan istifadə edərək verilən şərtlərə görə düz xəttin müxtəlif tənliyini qurmaq olar. Müstəvi üzərində düz xəttə paralel olan, yaxud onunla üst-üstə düşən və sıfırdan fərqlənən vektorlara düz xəttin yönəldici vektoru deyilir. Düz xəttin yönəldici vektoru sonsuz saydadır. Məktəb həndəsəsindən məlumdur ki, düz xəttin xaricindəki nöqtədən bu düz xəttə paralel bir düz xətt keçirmək olar. Ona görə də bu düz xətti müstəvi üzərində birqiymətli təyin etmək üçün onun bir nöqtəsinin və yönəldici vektorunun verilməsi kifayətdir. Müstəvi üzərində iki nöqtədən bir düz xətt keçirmək mümkün olduğu üçün düz xəttin iki nöqtəsi verildikdə, onu birqiymətli təyin etmək mümkündür. Deməli, düz xətti təyin etmək üçün iki üsuldan istifadə etmək olar.

1) Düz xəttin hər hansı bir nöqtəsi və yönəldici vektoru verilmişdir.

2) Düz xəttin iki nöqtəsi verilmişdir.

Hər iki halda düz xətti təyin edək.

Məsələ 1. Fərz edək ki, l düz xəttinin üzərində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və bu xəttin $\vec{a} = (a_1, a_2)$ yönəldici vektoru verilmişdir. Xəttin tənliyini təyin etmək üçün onun üzərində cari $M(x, y)$ nöqtəsi götürək. Bu nöqtə o zaman l düz xətti üzərində olar ki, $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ vektoru ilə yönəldici $\vec{a}$ vektoru kollinear

olsun. Onda bu şərtədən $\overline{M_0 M} = \vec{at}$ yazı bilərik. Əgər bu tənliyi koordinatlarla yazsaq

$$\begin{cases} x - x_0 = a_1 t \\ y - y_0 = a_2 t \end{cases}$$

yazmaq olar. Buradan

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad (1)$$

alınır. (1) tənliyinə düz xəttin parametrik tənlikləri deyilir. $t \in (-\infty; +\infty)$ parametr adlanır. Deməli, (1) tənlikləri vasitəsilə düz xəttin hər bir nöqtəsinə t parametrinin müəyyən bir qiyməti uyğun gəlir və yaxud əksinə t parametrinin hər bir qiymətinə düz xətt üzərində bir nöqtə uyğun gəlir. Düz xəttin parametrik tənliklərindən kinematikada daha çox istifadə olunur. M nöqtəsinin hərəkət qanunu parametrik tənliklərlə verilir. Əgər (1) tənliyindən t parametrini yox etsək

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyə düz xəttin kanonik tənliyi deyilir.

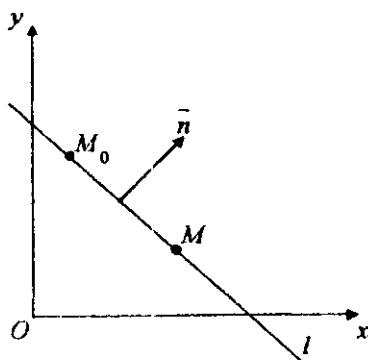
Əgər (1) tənliyi maddi nöqtənin hərəkət qanunları olarsa, onda (2) tənliyi trayektorianın tənliyi olar.

Məsələ 2. Fərz edək ki, l düz xəttinin iki $M_1(x_1, y_1)$ və $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələri verilmişdir. Bu düz xəttin tənliyini təyin edək. Əgər M_1 və M_2 nöqtələri düz xətt üzərində yerləşirsə, onda $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ vektoruna həmin düz xəttin yönəldici vektoru kimi baxa bilərik. Bu, yönəldici vektordursa, onda (2) tənliyindən

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyə iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi deyilir. Düz xəttin yönəldici vektoruna perpendikulyar olan vektora onun normal vektoru deyilir. Ona görə də düz xəttin bir nöqtəsi və normal vektoru verildikdə düz xətti birqiymətli təyin etmək olar.

Məsələ 3. Fərz edək ki, l düz xətti üzərində $M_0(x_0, y_0)$ və bu xəttin normal $\vec{n}(A, B)$ vektoru verilmişdir. Düz xəttin tənliyini təyin edək. Düz xətt üzərində ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsi götürək. Əgər bu nöqtə düz xətt üzərindədirsə, onda $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ vektoru ilə $\vec{n}(A, B)$ vektoru ortoqonal olar.



Ona görə də iki vektorun skalyar hasilindən istifadə etsək,

$$(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}) = 0$$

yaza bilərik. Sonuncu bərabərlikdən koordinatların köməyi ilə

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (4)$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik M_0 nöqtəsindən keçən və normal vektoru $\vec{n}$ olan düz xəttin tənliyidir.

§3. DÜZ XƏTTİN ÜMUMİ TƏNLIYI.

Əvvəlki dərisdə göstərdik ki, ikidəyişənli birdərəcəli tənlik düzbucaqlı koordinat sistemində xətt təyin edir.

İndi göstərək ki, ikidəyişənli birdərəcəli tənlik affın koordinat sistemində də düz xətti təyin edir.

Fərz edək ki,

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

şəklində ikidəyişənli birdərəcəli tənlik verilmişdir və A, B əmsallarının hər ikisi eyni zamanda sıfıra bərabər deyil. Əgər (1) tənliyinin təsvir etdiyi düz xətt $M_0(x_0, y_0)$ nöqtədən keçirsə, onda bu nöqtənin koordinatları həmin tənliyi ödəməlidir. Başqa sözlə,

$$Ax_0 + Ay_0 + C = 0 \quad (2)$$

ödənməlidir. Əgər (1) tənliyindən (2) tənliyini çıxarsaq,

$$A(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$$

alırıq. Bu tənlikdən

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$$

və yaxud

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A} \quad (3)$$

yaza bilərik. Bu tənliyi düz xəttin kanonik tənliyi ilə müqayisə etsək, göstərək ki, (3) tənliyi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici vektoru $\vec{a}(-B, A)$ olan düz xəttin tənliyidir. Aydındır ki, (1) düz xəttinin normal vektoru $\vec{n}(A, B)$ olmalıdır. Doğrudan da, $(\vec{a} \cdot \vec{n}) = -BA + AB = 0$ ödənilir. (1) tənliyinə düz xəttin

ümumi tənliyi deyilir. Əgər A, B, C əmsallarının hamısı sıfırdan fərqli olarsa, onda (1) tənliyinə düz xəttin ümumi tənliyi deyilir. Əgər bu əmsallardan heç olmazsa biri sıfıra bərabər olarsa, alınan tənliyə düz xəttin natamam tənlikləri deyilir. Aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $C=0$ olarsa, onda (1) tənliyindən $Ax + By = 0$ alırıq. Aydındır ki, koordinat başlanğıcının koordinatları bu tənliyi ödəyir, ona görə də bu tənlik koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyidir.

2) $A=0$ olarsa, $By + C = 0$ tənliyini alırıq. Bu düz xəttin yönəldici vektoru $\vec{a} = \{-B, 0\}$ vektorudur və bu vektorlar afin koordinat sistemində $\vec{e}_1 = \{1, 0\}$ vektoruna kolleniardır. Onda $\vec{a} = \{B\vec{e}_1, 0\}$ yazı bilərik. Bu isə onu göstərir ki, düz xətt absis oxuna paralel düz xətdir.

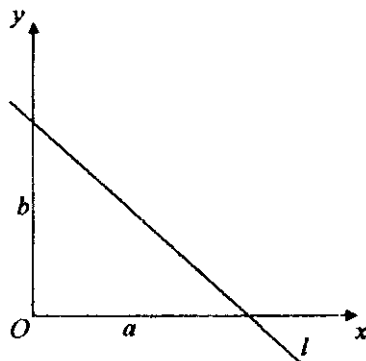
3) Əgər $B=0$, $Ax + C = 0$. Göstərmək olar ki, bu düz xətt Oy oxuna paralel düz xəttin tənliyidir.

4) Fərz edək ki, $A=0, C=0$, onda $By = 0$ olar. $B \neq 0$ olduğundan $y = 0$ olar. Burada $C=0$ olduğuna görə bu düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. $A=0$ olduğuna görə düz xətt Ox oxuna paraleldir. Bu halda verilən tənlik Ox oxunu təyin edir.

5) $B=0, C=0$ olarsa, onda düz xətt Oy oxunu təyin edir.

§4. DÜZ XƏTTİN PARÇALARLA TƏNLIYI.

Fərz edək ki, düz xəttin $Ax + By + C = 0$ tənliyi verilmişdir və əmsalların hamısı sıfırdan fərqlidir.



Onda bu tənliyi aşağıdakı kimi çevirmək olar.

$$\left(-\frac{A}{C}\right)x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1$$

$$\frac{\frac{x}{-\frac{C}{A}}}{-\frac{C}{A}} + \frac{\frac{y}{-\frac{C}{B}}}{-\frac{C}{B}} = 1$$

Burada

$$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$$

işarə etsək

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyə düz xəttin parçalarla tənliyi deyilir. (1) tənliyindən $y=0$ olduqda $x=a$; və $x=0$ olduqda $y=b$ olar. Deməli, $x=a$ və $y=b$ ədədləri (1) düz xəttinin koordinat oxlarından kəsib ayırdığı parçalara uyğundur. Qeyd edək ki, (1) tənliyinin təyin etdiyi düz xətt koordinat oxlarına paralel ola bilməz.

§5. DÜZ XƏTTİN BUCAQ ƏMSALLI TƏNLİYİ.

Fərz edək ki, düz xətt $Ax + By + C = 0$ tənliyi ilə verilmişdir və bu tənliyin bütün əmsalları sıfırdan fərqlidir. Onda bu tənliyi aşağıdakı kimi çevirmək olar.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

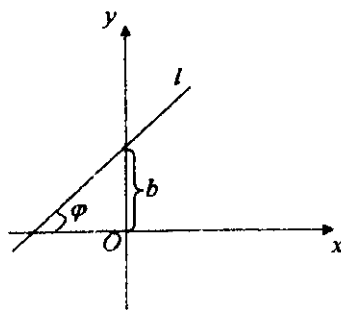
$$k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$$

əvəz etsək

$$y = kx + b \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyə düz xəttin k bucaq əmsallı tənliyi deyilir, k bucaq əmsalıdır və düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensinə bərabərdir. Əgər (2) tənliyində $x=0$ olarsa, $y=b$ olar.

Deməli, b ədədi düz xəttin ordinat oxundan ayırdığı parçaya uyğundur.



Bucaq əmsalı isə

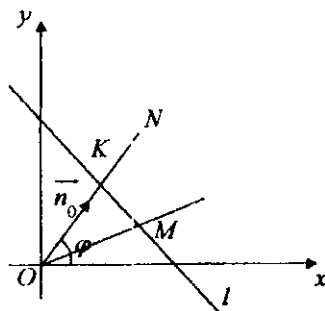
$$k = \operatorname{tg} \varphi$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

§6. DÜZ XƏTTİN NORMAL TƏNLİYİ VƏ NÖQTƏDƏN DÜZ XƏTTƏ QƏDƏR OLAN MƏSAFƏ.

Fərz edək ki, Oxy koordinat sistemində l düz xətti verilmişdir. Koordinat başlanğıcından bu düz xəttə perpendikulyar ON düz xətti çəkək. Bu düz xəttin l düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsini K ilə işarə edək. $\overline{OK}$ parçasının uzunluğunu p ilə işarə edək. ON perpendikulyarı üzərində vahid vektoru $\vec{n}^0$ ilə işarə edək. Bu vektorun absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq φ olsun. p və φ parametrlərindən istifadə edərək l düz xəttinin tənliyini təyin etmək

olar. $\vec{n}^0$ vahid vektorunun koordinatları $\cos \varphi, \sin \varphi$ olar. l düz xətti üzərində ixtiyarı $M(x, y)$ nöqtəsi götürək, onda aydındır ki, $\vec{OM}$ vektorunun koordinatları (x, y) olar.



Əgər M nöqtəsi l düz xətti üzərində olarsa, onda $\vec{OM}$ radius vektorudur. ON perpendikulyarından keçən düz xətt üzərində proyeksiyası p -yə bərabər olar. Yəni

$$pr_{\vec{n}^0} \vec{OM} = p \quad (1)$$

Deməli, M nöqtəsi yalnız və yalnız (1) şərti ödəndikdə l düz xətti üzərindədir. Burada proyeksiyanın tərifinə görə

$$pr_{\vec{n}^0} \vec{OM} = |\vec{n}^0| \cdot |\vec{OM}|$$

bərabərliyini yazmaq olar. Onda bu qiyməti (1) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$|\vec{n}^0| \cdot |\vec{OM}| = p$$

alırıq. Əgər $\vec{OM} = r$ qəbul etsək, sonuncu bərabərliyi

$$\overline{n^0} \cdot r - p = 0 \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar. (2) tənliyinə düz xəttin vektorial tənliyi deyilir. Əgər (2) tənliyini koordinatlarla yazsaq

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \quad (3)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyə düz xəttin normal və ya normallaşmış tənliyi deyilir.

Əgər düz xətt

$$Ax + By + C = 0 \quad (4)$$

şəklində ümumi tənliyi ilə verilmişdirsə, (4) tənliyini (3) şəklinə gətirmək mümkündür. (4) tənliyinin hər tərəfini t -yə vursaq

$$Atx + Bty + Ct = 0$$

olar. Əgər sonuncu tənliyi (3) tənliyi ilə müqayisə etsək

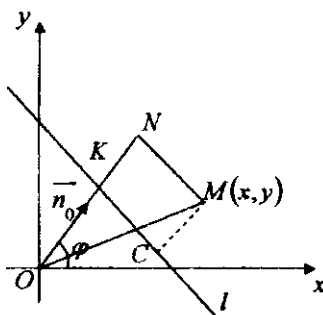
$$At = \cos \varphi, \quad Bt = \sin \varphi, \quad Ct = -p$$

alırıq. Bu bərabərliyin birinci və ikincisindən $t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ alırıq. Bu ifadəyə

normallaşdırıcı vuruq deyilir. $Ct = -p$ ifadəsində p -nin işarəsi həmişə müsbət olduğuna görə normallaşdırıcı vuruq, yəni, t -nin işarəsi həmişə p -nin işarəsinin əksinə götürülür. (3) tənliyindən istifadə edərək l düz xətti üzərində yerləşməyən nöqtədən bu düz xəttə qədər olan məsafəni təyin etmək mümkündür.

Fərz edək ki, l düz xətti və onun üzərində yerləşməyən $M(x, y)$ nöqtəsi verilmişdir. M nöqtəsindən l düz xəttinə qədər məsafəni təyin edək. Aydındır ki, bu məsafə M nöqtəsindən l düz xəttinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir. Yəni

$$|MC| = d$$



Əgər O nöqtəsi və M nöqtəsi l xəttinin müxtəlif tərəflərində yerləşirsə $\delta = +d$, O və M nöqtələri l düz xəttindən bir tərəfdə yerləşdikdə isə $\delta = -d$ götürülür. δ kəmiyyətinə M nöqtəsinin l düz xəttindən meyli deyilir. Əgər O nöqtəsi l düz xətti üzərində olarsa, onda δ meylinin işarəsi aşağıdakı kimi təyin edilir.

1) M nöqtəsi l düz xəttinə nəzərən $\overline{n^0}$ vektorunun istiqaməti tərəfində yerləşirsə, onda $\delta = +d$ götürülür.

2) M nöqtəsi l düz xəttindən $\overline{n^0}$ vektorunun əks istiqaməti tərəfində yerləşərsə, $\delta = -d$ götürülür.

İndi d -ni təyin edək. Bunun üçün M nöqtəsindən ON istiqamətinə perpendikulyar çəkək. Aydındır ki, M nöqtəsinin proyeksiyası N nöqtəsi olar.

$\overline{ON}$ vektorunun Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq φ və

$|\overline{OK}| = p$ olarsa, onda l düz xəttinin normal tənliyi

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \quad (3)$$

olar.

Deməli, (3) tənliyi ilə verilmiş l düz xətti və M nöqtəsi arasındakı məsafəni təyin etmək mümkündür.

Teorem: M nöqtəsindən (3) tənliyi ilə verilmiş l düz xəttinə qədər olan məsafəni tapmaq üçün (3) tənliyinin sol tərəfində həmin nöqtənin koordinatlarını yazmaq kifayətdir. Yəni,

$$d = |x \cos \varphi + y \sin \varphi - p| \quad (5)$$

İsbatı: Şəkildən görünür ki, $d = \overline{KN}$. Onda $\overline{KN} = \overline{ON} - \overline{OK}$

$$\overline{ON} = pr_{\overline{n^0}} \overline{OM} = \overline{n^0} \cdot \overline{OM} = x \cos \varphi + y \sin \varphi - \overline{OK}. \quad \overline{OK} = p \text{ olduğundan}$$

$d = x \cos \varphi + y \sin \varphi - p$ alırıq. Bu isə (5) bərabərliyi. Deməli, bu tənlikdən

görünür ki, $D(x_0, y_0)$ nöqtəsindən (3) tənliyi ilə verilmiş l düz xəttinə qədər

olan məsafəni hesabladıqda (5) ifadəsində cari koordinatların yerinə bu nöqtənin koordinatlarını yazmaq kifayətdir. Yəni, həmin məsafə

$$d = |x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p|$$

ifadəsi ilə hesablanır. M nöqtəsi l düz xətti üzərində yerləşərsə, $d = 0$ olar.

§7. MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ İKİ DÜZ XƏTTİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ.

Fərz edək ki, $\{\overline{O}, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ afin koordinat sistemində l_1 düz xətti

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

l_2 düz xətti isə

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu düz xətlər müstəvi üzərində aşağıdakı qarşılıqlı vəziyyətdə yerləşə bilər:

1) l_1 və l_2 düz xətləri üst-üstə düşə bilər. Bu halda l_1 düz xəttinin yönəldici $\overline{q_1}(-B_1, A_1)$ vektoru l_2 düz xəttinin yönəldici $\overline{q_2}(-B_2, A_2)$ vektoru ilə kolleniar olmalıdır. Əgər bu vektorlar kolleniarsa, onda

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

olduğundan və düz xətlər üst-üstə düşdüyündən (1) və (2) tənlikləri bərabər olmalıdır. Ona görə də

$$\frac{-B_1}{-E_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3)$$

ödənməlidir. (3) şərti ödənərsə

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$$

olduğundan (2) tənliyindən

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0$$

alırıq. Burada $\lambda \neq 0$ olduğundan $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ alınır. Bu isə göstərir ki, (1) və (2) tənlikləri ekvivalent tənliklərdir. (3) şərtinə iki düz xəttin üst-üstə düşmə şərti deyilir. Deməli, (3) şərti ödənərsə, onda l_1 və l_2 düz xətləri üst-üstə düşür.

2) l_1 və l_2 düz xətləri paraleldir. Əgər l_1 və l_2 düz xətləri paraleldirsə, onda onların yönəldici $\vec{q}_1$ və $\vec{q}_2$ vektorları kolleniər olamlıdır. Bu şərtədən isə, yəni kolleniərlik şərtindən

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (4)$$

bərabərliyi alınır. (4) bərabərliyini $\frac{C_1}{C_2}$ -ə bərabər etmək olmaz. Çünki bu halda

düz xətlər üst-üstə düşər. Baxdığımız halda isə düz xətlər üst-üstə düşmür, paraleldir. (4) şərtinə iki düz xəttin paralellik şərti deyilir.

3) Fərz edək ki, (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş l_1 və l_2 düz xətləri kəsişir.

Əgər bu düz xətlər kəsişirsə, onda onların yönəldici $\vec{q}_1$ və $\vec{q}_2$ vektorları kolleniar vektorlar deyildir. Bu vektorlar kollinear deyilsə,

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad (5)$$

şərti ödənməlidir. (5) şərtinə iki düz xəttin kəsişmə şərti deyilir. (1) və (2) tənlikləri ilə təyin olunan düz xətlər kəsişirsə, (5) şərti ödənilir və bu kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapmaq üçün (1) və (2) tənliklər sistemini birlikdə həll etmək lazımdır.

§8. İKİ DÜZ XƏTT ARASINDAKI BUCAQ.

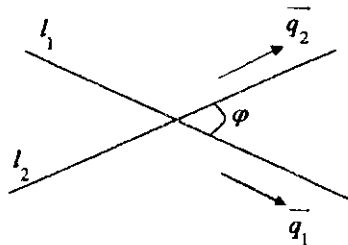
Fərz edək ki,

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y - C_2 = 0 \quad (2)$$

tənlikləri ilə verilmiş l_1 və l_2 düz xətləri kəsişir. Aydındır ki, bu kəsişmədən dörd bucaq alınır və bu bucaqlar cüt-cüt qarşılıqlı olduğundan bunlardan birini tapdıqda qalanlarını təyin etmək mümkündür. Əgər bu düz xətlər kəsişirsə, onda onların yönəldici $\vec{q}_1$ və $\vec{q}_2$ vektorları da kəsişir və bu vektorlar arasında qalan bucaq düz xətlərin kəsişməsindən alınan bucaqlardan birinə bərabərdir.

Ona görə də bu vektorlar arasındakı bucağı tapsaq, düz xətlər arasında qalan bucağı tapmış olarıq.



İki vektorun skalyar hasilindən istifadə etsək, yönəldici vektorlar arasında qalan bucağı

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (3)$$

düsturu ilə hesablamaq olar.

Əgər (3) bərabərliyində

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (4)$$

olsa, $\cos \varphi = 0$ yaxud $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olar. Ona görə də (4) bərabərliyi (1) və (2) tənlikləri

ilə verilmiş l_1 və l_2 düz xətlərinin perpendikulyarlıq şərti adlanır. Aydındır ki,

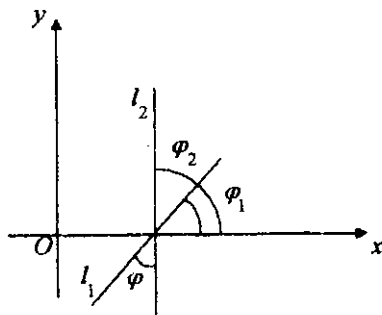
l_1 və l_2 düz xətləri paralel olsa, yönəldici $\vec{q}_1$ və $\vec{q}_2$ vektorları kolleniar olar,

yəni,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (5)$$

şerti ödənər. Ona görə də (5) bərabərliyi l_1 və l_2 düz xətlərinin paralellik şərti adlanır.

Əgər l_1 düz xətti $y_1 = k_1 x + b_1$, l_2 düz xətti $y_2 = k_2 x + b_2$ tənlikləri ilə verilmişsə, onda onlar arasında qalan bucağı təyin etmək olar.



Şəkildən görünür ki, l_1 və l_2 düz xətləri arasında qalan bucaq $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ -ə

bərabərdir. Onda

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}$$

olar. Burada

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$$

olduğundan

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

olar. Deməli, sonuncu düstur vasitəsilə düz xətlər bucaq əmsallı tənliklər ilə verildikdə onlar arasında qalan bucağı təyin etmək olar. Əgər düz xətlər paraleldirsə, onda onlar arasında qalan bucaq ya sıfır, ya da π -yə bərabər olacaq. Bu halda sonuncu düsturda $\operatorname{tg} \varphi = 0$ olduğundan düz xətlərin paralellik şərtini $k_2 - k_1 = 0$ və yaxud $k_2 = k_1$ şəklində alırıq. Əgər düz xətlər qarşılıqlı perpendikulyardırsa, onda $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow +\infty$ olduğundan $1 + k_1 k_2 = 0$ olar. Buradan isə $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ alırıq. Bu şərtə düz xətlərin perpendikulyarlıq şərti deyilir.

§9. DÜZ XƏTLƏR DƏSTƏSİ.

Verilmiş π müstəvisinin hər hansı bir $S(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və bu müstəvi üzərində yerləşən düz xətlər çoxluğuna düz xətlər dəstəsi deyilir. Verilmiş $S(x_0, y_0)$ nöqtəsinə isə dəstənin mərkəzi deyilir. Əgər dəstənin mərkəzi verilmişdirsə, onda düz xətt dəstəsinin istənilən düz xəttini təyin etmək olar. Doğrudan da, düz xəttin tənliyi $y - y_0 = k(x - x_0)$ olarsa, k -ya müxtəlif qiymətlər verildikdə, onda dəstənin müxtəlif düz xəttinin tənliyini yazmaqla bilərik. Düz xətlər dəstəsinin iki düz xəttinin tənliyi verildikdə, düz xətlər dəstəsinin mərkəzini təyin etmək olar. Belə ki, düz xətlər dəstəsinin l_1 düz xətti

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad (1)$$

l_2 düz xətti isə

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

tənlikləri ilə verilmişdirsə, onda dəstənin mərkəzini tapmaq üçün tənliklər sistemini x və y dəyişənlərinə nəzərən həll etmək kifayətdir. Dəstənin mərkəzini təyin etdikdən sonra onun istənilən düz xəttini təyin etmək mümkündür.

Deməli, düz xətt dəstəsinin iki düz xətti (1) və (2) tənlikləri ilə verildikdə, düz xətt dəstəsinin mərkəzini təyin etdikdən sonra dəstənin istənilən düz xəttini təyin etmək mümkündür. Bu məsələnin həlli aşağıdakı teoremdən alınır.

Teorem: Əgər dəstənin l_1 düz xətti (1), l_2 düz xətti (2) tənlikləri ilə verilsə və bu xətlər $S(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçirsə, onda hər ikisi eyni zamanda sıfıra bərabər olmayan α, β ədədləri tapmaq olar ki,

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (3)$$

tənliyi ilə dəstənin istənilən düz xəttini təyin etmək olar.

İsbatı: Əgər α və β ədədləri eyni zamanda sıfıra bərabər deyilsə və (3) tənliyi birdərəcəli tənlikdir. Ona görə də bu tənliyi x və y -ə nəzərən qruplaşdırsaq

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0 \quad (4)$$

tənliyi birdərəcəli tənlik olduğundan düz xətt tənliyidir.

Doğrudan da,

$$\begin{cases} \alpha A_1 + \beta A_2 = 0 \\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0 \end{cases}$$

olarsa, onda

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha} \\ \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

alırıq. Bu bərabərlikdən $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ şərti alınır. Sonuncu şərt l_1 və l_2 düz

xətlərinin paralellik şərtidir. Bu isə teoremin şərtinə ziddir, yəni l_1 və l_2 düz

xətləri şərtə görə $S(x_0, y_0)$ nöqtəsində kəsişir. Ona görə də onlar paralel ola

bilməz. Bu isə o deməkdir ki, (3) tənliyi düz xətt təyin edir və (3) tənliyinin

təyin etdiyi düz xətlərin dəstəyə mənsub olduğunu göstərir. Aydındır ki,

dəstənin istənilən düz xətti $S(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçir. Onda bu düz xətti

birqiymətli təyin etmək üçün onun istənilən $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsini götürək. Əgər

(3) düz xətti M_1 nöqtəsindən keçirsə,

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0 \quad (5)$$

olar. Onda (5) tənliyindən

$$A_1x + B_1y + C_1 \neq 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 \neq 0$$

alınır. Əgər (5) bərabərliyindən mötərizənin içərisindəki ifadələr sıfıra bərabər olsaydı l_1 və l_2 düz xətləri $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsindən keçərdi. Onda həmin düz xətlər $S(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçdiyinə görə üst-üstə düşər. Bu isə şərtdə ziddir. Ona görə də $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsindən düz xətlər l_1 və l_2 düz xətlərindən fərqli düz xətdir. Başqa sözlə, (3) tənliyi ilə dəstənin istənilən düz xətlərini təyin etmək olar. (3) tənliyi iki (α, β) parametrləndən asılıdır və parametrlərin hər ikisi eyni zamanda sıfıra bərabər deyil. Ona görə də $\alpha \neq 0$ olsa, (3) tənliyindən

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (6)$$

tənliyini ala bilərik. Burada $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$; (6) tənliyi bir parametri λ olan tənlikdir.

Qeyd edək ki, λ -nin müxtəlif qiymətlərində dəstənin istənilən düz xətlərini təyin etmək mümkündür. Yalnız və yalnız (2) tənliyi ilə təyin olunmuş l_2 düz xəttini (6) tənliyindən almaq mümkün deyil. Çünki λ parametrlərinin elə bir qiyməti yoxdur ki, (6) tənliyindən (2) tənliyi alınсын.

V FƏSİL

MÜSTƏVİ ÇEVİRİLMƏLƏRİ.

§1. İNİKAS VƏ ONUN NÖVLƏRİ.

Fərz edək ki, bizə X və Y çoxluqları verilmişdir. Əgər X çoxluğundan götürülmüş hər bir x elementinə Y çoxluğundan götürülmüş hər bir y elementi müəyyən qayda ilə uyğun qoyulmuşdursa, deyirlər ki, X çoxluğundan Y çoxluğuna $f: x \rightarrow y$ inikası təyin olunmuşdur.

Əgər X və Y çoxluqları ədədi çoxluqlardırsa, onda aydındır ki, bu çoxluqlar arasındakı uyğunluq funksiya adlanır. Başqa sözlə, funksiya inikasin xüsusi halıdır. Funksiyada olduğu kimi inikasda da X çoxluğuna təyin, Y çoxluğuna qiymətlər çoxluğu deyilir. Əgər X çoxluğundan götürülmüş x elementinə Y çoxluğundan götürülmüş y elementi uyğun qoyularsa, onda bu uyğunluq $f(x) = y$ şəklində yazılır.

İnikası aşağıdakı növlərə ayırmaq olar.

1) İxtiyari x_1 və x_2 elementləri üçün

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ və yaxud } (y_1 \neq y_2)$$

şərti ödənərsə, onda belə inikasa inyektiv inikas deyilir. Yaxud inveksiya adlanır.

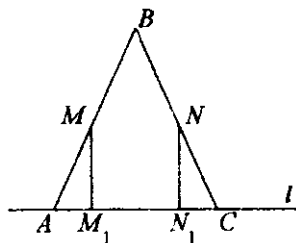
$f(x) = y$ inikasda y -ə x -in obrazı, x -ə isə y -in proobrazı deyilir.

2) Əgər f inikası zamanı X çoxluğunun obrazı Y çoxluğu olarsa, onda belə inikasa suryektiv inikas deyilir. Yaxud suryeksiya adlanır.

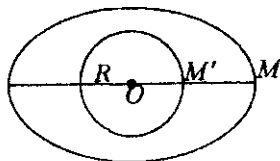
3) Əgər $f: x \rightarrow y$ inikası həm inyektiv, həm də suryektiv olarsa, ona biyektiv inikas və yaxud biyeksiya deyilir.

Bu inikaslara aid aşağıdakı misalları göstərmək olar.

1. Tutaq ki, $\triangle ABC$ verilmişdir. AB və BC tərəfləri üzərindəki nöqtələri AC tərəfi üzərindəki nöqtələrə ortoqonal inikas etdirək. Onda AB və BC tərəfləri üzərindəki bütün nöqtələrə uyğun, AC üzərində nöqtələr təyin etmiş olarıq. Əgər burada AC -ni parça kimi qəbul etsək, onda bu inikas inyektiv inikasıdır. Əgər AC -ni l düz xətti ilə əvəz etsək, onda inikas suryektiv inikasıdır.



2) Fərz edək ki, mərkəzləri eyni olan ellips və çevrə verilmişdir. Bu çevrənin mərkəzindən radiuslar çəkək. Radius ellipsi M , çevrəni isə M' nöqtəsində kəsir.



Deməli, bu cür radiuslar çəksək, çevrə ilə ellips arasında əlaqə yaranır. Başqa sözlə, çevrənin hər bir nöqtəsinə ellipsin bir nöqtəsi uyğun olar və çevrənin bütün nöqtəsinə ellipsin nöqtələri uyğundur. Ona görə də suryektiv inikasdır. Hər hansı bir X çoxluğunda x elementini öz-özlünə çevirən inikasa eynilik çevrilməsi deyilir. Gələcəkdə bir müstəvidən danışdığımıza görə müstəvi çevirməsinə baxaq.

Müstəvinin hər bir nöqtəsini özlünə çevirən inikasa vahid çevirmə və yaxud eynilik çevrilməsi deyilir. x -in obrazı y -dirsə, y -in obrazı x -isə, yəni $f(x)=y$ olarsa, onda $f^{-1}(y)=x$ çevrilməsi tərs çevirmə adlanır. Qeyd edək ki, istənilən çevirmənin tərs çevrilməsi var.

§2. ÇEVİRLMƏLƏR QRUPU VƏ ALT QRUP.

Fərz edək ki, f çevrilməsi x elementini y -ə inikas edir. Yəni $f(x)=y$; g çevrilməsi isə y elementini z -ə çevirir. Yəni $g(y)=z$. Bu çevirmələr ardıcıl tətbiq olunduğuna görə x elementini z -ə çevirmək olar $x \rightarrow z$. Bu çevirmələr ardıcılığı $f \circ g$ kimi yazılır. Deməli, $f \circ g(x)=z$; $f \circ g$ çevirmələr ardıcılığına f və g çevirmələrinin kompozisiyası deyilir.

Fərz edək ki, bizə f, g, h çevrilmələri verilmişdir. Bu çevrilmələr çoxluğunu G ilə işarə edək. Əgər çevrilmələr çoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyirsə, onda deyirlər ki, G çoxluğu qrup təşkil edir, yəni G çevrilmələr çoxluğu üçün

$$1) f, g, h \in G \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

$$2) f, g \in G \quad f \circ g \in G, \quad f \circ E = E \circ f = f$$

$$3) f \in G \quad f^{-1} \in G$$

şərtləri ödənərsə, onda G çoxluğuna bu çevrilmələrin kompozisiyasına nəzərən çevrilmələr qrupu deyilir və $\{G_0\}$ ilə işarə olunur. Əgər $H \neq \emptyset$ olarsa, və $H \in G$ -sə onda H çevrilmələr qrupu göstərilən 2) və 3) şərtini ödəyirsə, onda ona G çevrilmələr qrupunun alt qrupu deyilir. Başqa sözlə, $G \ni H$ çevrilmələr qrupu üçün

$$1) f, g \in H: f \circ g \in H$$

$$2) f \in H, \quad f^{-1} \in H$$

şərtləri ödənirsə, onda H çevrilmələr qrupuna G qrupunun alt qrupu deyilir.

§3. MÜSTƏVİDƏ HƏRƏKƏT.

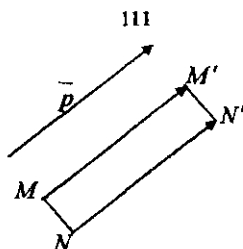
Hər hansı bir π müstəvisinin ixtiyari iki nöqtəsi arasındakı məsafə f çevrilməsi zamanı dəyişməzsə, onda bu çevrilməyə müstəvinin hərəkəti deyilir. Yəni əgər f çevrilməsi zamanı müstəvinin $M \rightarrow M'$, $N \rightarrow N'$ verilmişdirsə və bu çevrilmələr zamanı $f(M, N) = f(M', N')$ şərti ödənilirsə, onda belə çevrilmə müstəvi hərəkətidir. Çünki bu çevrilmə zamanı müstəvinin nöqtələri öz-özünə inikas olunduğundan onlar arasındakı məsafə dəyişmir. Yəni çevrilmə müstəvi hərəkətidir. Müstəvi hərəkətinə aşağıdakıları göstərmək olar.

1) *Paralel köçürmə*: Fərz edək ki, bizə $\vec{p} \neq 0$ vektoru verilmişdir.

Müstəvinin M nöqtəsini elə M' nöqtəsinə çevirək ki, $\overline{MM'} = \vec{p}$ olsun, onda bu çevrilməyə $\vec{p}$ vektoruna malik çevrilmə deyilir. Əgər hərəkət zamanı $M(x, y)$ nöqtəsi $M'(x', y')$ nöqtəsinə, N nöqtəsi N' nöqtəsinə çevrilirsə və bu hərəkət zamanı

$$\begin{aligned} |\overline{MM'}| &= \vec{p} \\ |\overline{NN'}| &= \vec{p} \end{aligned}$$

olarsa, onda $|\overline{MM'}| = |\overline{NN'}|$ olar. Çünki hərəkət zamanı iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmir.



Fərz edək ki, $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ verilmişdir və g hərəkəti $M(x, y)$ nöqtəsini $M'(x', y')$

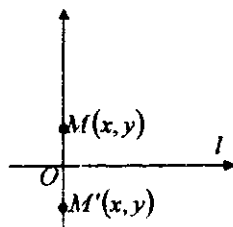
nöqtəsinə çevirir, yəni $g: M \rightarrow M'$. Bu hərəkəti koordinatlarla yazsaq:

Tutaq ki, $\overline{MM'} = \{x' - x, y' - y\}$ verilmişdir. Onda $\overline{MM'} = \vec{p}$ olduğundan

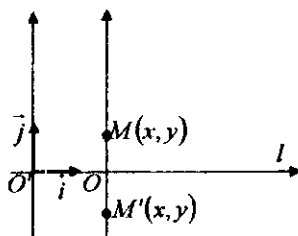
$$\left. \begin{array}{l} x' - x = p_1 \\ y' - y = p_2 \end{array} \right\} \text{ yaxud } \begin{cases} x' = x + p_1 \\ y' = y + p_2 \end{cases} \quad (1)$$

olar. Bu paralel köçürmənin koordinatlarla ifadəsidir. Yəni g hərəkəti müstəvinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsini $M'(x', y')$ nöqtəsinə çevirdikdə və bu çevirmə $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ vektoruna malikdirsə, onda həmin nöqtələrin koordinatları arasındakı əlaqə (1) düsturu ilə təyin olunur. Buradan görünür ki, (1) düsturu ilə təyin olunan paralel köçürmə müstəvi hərəkətidir.

2) Ox simmetriyası: Fərz edək ki, l oxu $\overline{MM'}$ parçasını yarıya bölür. Əgər l oxu $\overline{MM'}$ parçasını yarıya bölürsə, $|\overline{MO}| = |\overline{OM'}|$ olduğundan onda M və M' nöqtəsinə l oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr deyil. l oxuna isə simmetriya oxu deyilir. Çünki bu çevirmədə iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmir.



Fərz edək ki, ox simmetriyası müstəvinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsini $M'(x', y')$ nöqtəsinə çevirir və simmetriya oxu l -dir. (O', i, j) koordinatlar sistemini elə seçək ki, absis oxu ilə l oxu üst-üstə düşsün.



O nöqtəsi MM' parçasının orta nöqtəsidir və absis oxu üzərində yerləşir. Ona görə də

$$\begin{cases} \frac{x + x'}{2} = x \\ \frac{y + y'}{2} = 0 \end{cases}$$

yaza bilərik. Buradan isə ox simmetriyasını koordinatlarla

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

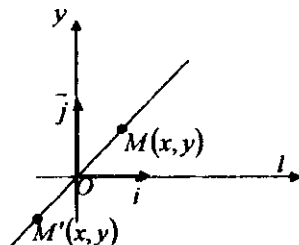
şəklində təyin edə bilərik. Ox simmetriyasında da iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmədiyindən müstəvi hərəkətidir.

3) Mərkəzi simmetriya: Fərz edək ki, hər hansı bir g çevrilməsi müstəvinin

$M(x, y)$ nöqtəsini $M'(x', y')$ nöqtəsinə çevirir. Yəni

$$g: M \rightarrow M'$$

$\overline{MM'}$ parçasının orta nöqtəsini O ilə işarə edək. Onda $\overline{OM} = \overline{OM'}$ olar. Bu halda O nöqtəsinə simmetriya mərkəzi deyilir və M, M' nöqtələri simmetrik nöqtələr adlanır.



Mərkəzi simmetriyada nöqtələr arasındakı məsafə dəyişmədiyindən mərkəzi simmetriya müstəvi hərəkətidir. $\{O, i, j\}$ koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı simmetriya mərkəzi ilə üst-üstə düşsün. Onda simmetriya mərkəzinin koordinatları $O(0,0)$ olar. Ona görə də

$$\frac{x+x'}{2}=0, \quad \frac{y+y'}{2}=0$$

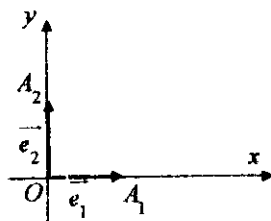
yaza bilərik. Buradan

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

olar. Bu düstür mərkəzi simmetriyanın koordinatlarla ifadəsidir.

Hərəkətin xassələrini öyrənməzdən əvvəl afin reperi adlanan anlayışı öyrənək.

Fərz edək ki, bizə $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sistemi verilmişdir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vektorlarının uc nöqtələrini uyğun olaraq A_1 və A_2 ilə işarə edək.



Onda aydındır ki,

$$\begin{aligned} |\overline{Oe_1}| &= |\overline{OA_1}| \\ |\overline{Oe_2}| &= |\overline{OA_2}| \end{aligned}$$

olar. Onda bir düz xətt üzərində olmayan $\{O, A_1, A_2\}$ nöqtələrinin verilməsi

$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sisteminin verilməsinə ekvivalentdir. Ona görə də bir düz

xətt üzərində olmayan $\{O, A_1, A_2\}$ nöqtələrinə afin reperi də deyilir. Əgər xüsusi

halda $|\overline{Oe_1}| = |\overline{Oe_2}|$ və $\overline{Oe_1} \perp \overline{Oe_2}$ olarsa, onda $\{O, A_1, A_2\}$ reperinə ortoqonal reper deyilir. Afin reperindən istifadə edərək hərəkət haqqında aşağıdakı teoremi isbat etmək olar.

Teorem: İstənilən g hərəkəti afin reperi afin repərə çevirir. Xüsusi halda müstəvi hərəkəti ortonormal afin reperini ortonormal afin reperinə çevirir.

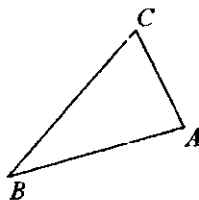
İsbati: Fərz edək ki, $R = \{A, B, C\}$ reperi və g hərəkəti verilmişdir. Bu hərəkət R reperini hər hansı bir R' reperinə çevirir, yəni

$$g: R \rightarrow R'$$

Əgər A, B və C nöqtələri hərəkət zamanı çevrildikləri nöqtələri uyğun olaraq A', B' və C' işarə etsək, onda

$$g: A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$$

çevrilər.



A, B və C nöqtələri bir düz xətt üzərində olmadığından

$$BC < AB + AC$$

ödənilir və hərəkət zamanı iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmədiyindən

$$\begin{cases} |BC| = |B'C'| \\ |AB| = |A'B'| \\ |AC| = |A'C'| \end{cases}$$

olmalıdır. Ona görə də A', B' və C' nöqtələri üçün $B'C' < A'B' + A'C'$ yazı bilərik.

Bu isə onu göstərir ki, A, B və C nöqtələri bir düz xətt üzərində deyil və bu üç nöqtə reper təşkil edir.

$$g: R = \{A, B, C\} \rightarrow R' = \{A', B', C'\}$$

Əgər $R = \{A, B, C\}$ reperi ortonormal reperdirsə, onda $\angle A = 90^\circ$ olduğundan

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ olar. Hərəkət zamanı $g: A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ ödəndikdə və iki

nöqtə arasındakı məsafə dəyişmədiyindən A', B' və C' nöqtələri üçün

$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$ yazmaq olar və $\angle A' = 90^\circ$ ödənər, yəni $R' = \{A', B', C'\}$ reperi

ortonormal reperdir.

Teorem: Əgər R reperi və R' reperi verilmişsə, onda elə yeganə hərəkət təyin etmək olar ki, bu hərəkət zamanı $M(x, y)$ nöqtəsi $M'(x', y')$ nöqtəsinə çevrildikdə M nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları M' nöqtəsinin R' reperinə nəzərən koordinatlarına bərabər olar.

§4. HƏRƏKƏTİN KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

Əgər g hərəkəti R reperini onunla eyni oriyentasiyalı olan R' reperinə çevirirsə, belə hərəkətə I növ hərəkət deyilir. Əgər g hərəkəti R reperini onunla əks oriyentasiyalı olan R' reperinə çevirirsə, onda belə hərəkətə II növ hərəkət deyilir.

Fərz edək ki, g hərəkəti $R = \{A, B, C\}$ reperini $R' = \{A', B', C'\}$ reperinə inikas etdirir. Əgər bu çevrilmə $M(x, y)$ nöqtəsini $M'(x', y')$ nöqtəsinə çevirirsə, onda $M' = g(M)$ və bu nöqtələrin koordinatları arasında aşağıdakıları təyin edə bilərik.

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0 \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0 \end{aligned} \right\}$$

Hərəkət zamanı iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişdiyindən sonuncu düsturlar hərəkətin koordinatlarla ifadəsi olar. Sonuncu düsturdan

$$\delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\varepsilon \sin \alpha \\ \sin \alpha & \varepsilon \cos \alpha \end{vmatrix}$$

yazmaq olar. Bu determinanta hərəkətin determinantı deyilir və görünür ki,

$$\delta = \varepsilon (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \varepsilon$$

Əgər bu ifadədə $\varepsilon=1$ götürsək, onda hərəkət I növ hərəkət, $\varepsilon=-1$ olarsa, II növ hərəkət olar. Ona görə də deyə bilərik ki, paralel köçürmə və mərkəzi simmetriya birinci növ hərəkətdir. Ox simmetriyası isə ikinci növ hərəkətdir.

§5. HƏRƏKƏTLƏR Qrupu VƏ ONUN ALT Qrupu.

Müstəvidə hərəkətlər çoxluğunu D ilə işarə edək və fərz edək ki, f və g hərəkətləri D -yə daxildir. Bu çoxluq bu hərəkətlərin kompozisiyasına nəzərən qrup təşkil edir, yəni

$$f, g \in D \text{ olarsa, } fog \in D$$

Fərz edək ki, f hərəkəti M nöqtəsini M' nöqtəsinə, N nöqtəsini N' nöqtəsinə çevirir. Hərəkət zamanı iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmədiyindən $\overline{MN} = \overline{M'N'}$. g hərəkəti $M' \rightarrow M''$, $N' \rightarrow N''$ -ə çevirir. Burada $\overline{M'N'} = \overline{M''N''}$ ödənilir. Son iki bərabərliyi müqayisə etsək, $\overline{MN} = \overline{M''N''}$ olur. Yəni fog kompozisiyası M -i M'' -ə, N -i N'' -ə çevirir. f və g hərəkətlərin kompozisiyası üçün iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmir. Bu isə o deməkdir ki, fog kompozisiyası hərəkətdir. Əgər bu hərəkətdirsə, onda D -yə daxildir. Bu isə o deməkdir ki, D hərəkətlər

çoxluğu qrup təşkil edir. Əvvəldən məlumdur ki, müstəvi hərəkətini iki növə ayırmaq olar.

1) I növ hərəkət çoxluğu

2) II növ hərəkət çoxluğu

Fərz edək ki, D_1 I növ hərəkət çoxluğudur. Onda f çevrilməsi R reperini R_1 reperinə çevirir. Yəni, $f: R \rightarrow R_1$; $g \in D_1$ isə g hərəkəti R_1 reperini R_2 reperinə çevirirsə, yəni $g: R_1 \rightarrow R_2$, onda R_1 və R_2 reperləri eyni orientasiyalı olduğundan (fog) hərəkətin kompozisiyası R reperi R_2 -ə çevirir. R və R_2 eyni orientasiyalı olduğuna görə (fog) kompozisiyası I növ hərəkət olar. Bu isə o deməkdir ki, $fog \in D$ olur. Əgər f hərəkəti I növ hərəkətdirsə və hərəkət zamanı $f: M \rightarrow M'$ olarsa, çevirmə qarşılıqlı birqiymətlidir, yəni elə f^{-1} çevrilməsi var ki, bu zaman $f^{-1}: M' \rightarrow M$ olduqda $f \in D_1$ və $f^{-1} \in D_1$ olur. Bu isə odeməkdir ki, D_1 çoxluğu həmin hərəkətin kompozisiyasına nəzərən çoxluq təşkil edir. D_1 I növ hərəkət çoxluğu D -yə daxil olduğundan, yəni $D_1 \in D$ olduğundan D_1 -ə D hərəkət qrupunun alt qrupu deyilir. Göstərmək olar ki, II növ hərəkət çoxluğu qrup təşkil etmir. Yəni paralel köçürmə qrup təşkil etdiyi halda, ox simmetriyası qrup təşkil etmir. Yəni o, II növ hərəkətdir.

§6. OXŞAR ÇEVİRLMƏLƏR.

Fərz edək ki, $k > 0$ ədədi və f çevrilməsi verilmişdir. Bu çevirmə zamanı $M \rightarrow M'$, $N \rightarrow N'$ -ə çevirir. Yəni $f: M \rightarrow M'$, $f: N \rightarrow N'$ olur. Əgər bu çevirmədə

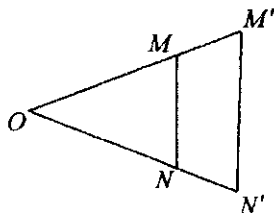
$$\overline{M'N'} = k\overline{MN} \quad (1)$$

şərti ödənərsə, onda ona k əmsallı oxşar çevirmə deyilir. (1) bərabərliyindən görünür ki, $k=1$ olduqda, $\overline{M'N'} = \overline{MN}$. Bu o deməkdir ki, hərəkət oxşar çevrilmənin xüsusi halıdır. Onun digər xüsusi halı homotetiyaadır.

Tutaq ki, hər hansı (k) əmsallı (f) oxşar çevrilməsi verilmişdir. İxtiyari bir O nöqtəsi götürək və fərz edək ki, (f) oxşar çevrilməsi $M \rightarrow M'$, $N \rightarrow N'$ -ə çevirir. Əgər bu çevirmə zamanı

$$\overline{OM'} = k\overline{OM}$$

şərti ödənərsə belə çevrilməyə homotetiya deyilir.



Aydındır ki, bu halda $\overline{MN'} = k\overline{MN}$ olar. O -ya homotetiyanın mərkəzi deyilir və aşağıdakı xassələri var.

1) Homotetiya mərkəzdən keçən düz xətti özünə çevirir.

2) Homotetiya mərkəzindən keçməyən düz xətti özünə paralel düz xəttə çevirir.

3) Homotetiya bucağı özünə bərabər bucağa çevirir.

4) Homotetiya üç nöqtənin sadə nisbətini dəyişmir. Yəni homotetiya M_1, M_2

və M_3 nöqtələrini M'_1, M'_2 və M'_3 nöqtəsinə çevirirsə, onda

$$\rho(M_1, M_2, M_3) = \rho'(M'_1, M'_2, M'_3)$$

bərabərliyi ödənilir.

Teorem 1: k_1 əmsallı h_1 , k_2 əmsallı h_2 homotetiylarının hasili, əmsalı $k_1 \cdot k_2$

olan homotetiyadır.

İsbati: Fərz edək ki, h_1 homotetiylası M nöqtəsini M' nöqtəsinə çevirir. Onda

$\overline{OM'} = k_1 \overline{OM}$ olar. h_2 homotetiylası isə M' nöqtəsini M'' nöqtəsinə çevirir. Onda

$\overline{OM''} = k_2 \overline{OM'}$ yazmaq olar. Əvvəlki bərabərliyi burada nəzərə alsaq,

$\overline{OM''} = k_1 \cdot k_2 \overline{OM}$ olar. Bu isə o deməkdir ki, $h_1 \cdot h_2$ hasili $k_1 \cdot k_2$ əmsallı

homotetiyadır.

Teorem 2: Əgər $|k|$ əmsallı H homotetiyası və müsbət k əmsallı f çevrilməsi verilmişdirsə, onda f çevrilməsi H homotetiyası ilə hər hansı bir g hərəkətinin hasilinə bərabərdir. Yəni $f = H \cdot g$ doğrudur.

İsbatı: Tutaq ki,

$$f \cdot H^{-1} = g$$

ödənilir. f çevrilməsinin əmsalı k olduğundan H^{-1} -in əmsalı $\frac{1}{k}$ olar. Onda

$f \cdot H^{-1}$ -in əmsalı

$$k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

olar. Yəni g hərəkətdir. Doğrudan da,

$$g = f \cdot H^{-1}$$

bərabərliyindən

$$H \cdot g = fH^{-1} \cdot H$$

yaxud

$$H \cdot g = f(H^{-1} \cdot H)$$

bərabərliyini alarıq. Buradan isə

$$f = H \cdot g$$

bərabərliyi alınır.

Hərəkət nəticəsində biri-digərinə çevrilən fiqurlara konqurent fiqurlar deyilir.

§7. HOMOTETİYANIN KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

Fərz edək ki, k əmsallı h homotetiyası müstəvinin $M(x, y)$ nöqtəsini $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsinə çevirir. Yəni

$$h: M(x, y) \rightarrow \tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

onda homotetiyanın tərifinə əsasən

$$\begin{cases} \tilde{x} = kx \\ \tilde{y} = ky \end{cases} \quad (1)$$

yazmaq olar. Əgər f çevrilməsi $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nöqtəsini müstəvinin $M'(x', y')$ nöqtəsinə çevirirsə, onda (f) çevrilməsinin ümumiləşmiş çevrilməsinə əsasən

$$\begin{cases} x' = \tilde{x} \cos \alpha - \varepsilon \tilde{y} \sin \alpha + x_0 \\ y' = \tilde{x} \sin \alpha + \varepsilon \tilde{y} \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

alırıq. Bu düstur ümumiləşmiş k əmsallı çevirmə olduğundan onu

$$\begin{cases} x' = kx \cos \alpha - \varepsilon ky \sin \alpha + x_0 \\ y' = kx \sin \alpha + \varepsilon ky \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

şəklində yazmaq olar. Sonuncu düsturlar homotetiyanın koordinatlarla ifadəsidir. Göstərmək olar ki, homotetiya qrup təşkil edir və bu qrup oxşar çevirmələr qrupunun alt qrupudur.

§8. AFİN ÇEVİRLMƏSİ.

İxtiyari d düz xətti üzərində A, B və C nöqtələri götürək. Əgər müstəvi çevrilməsi zamanı bir düz xətt üzərində olan A, B və C nöqtələri d_1 düz xətt üzərində olan A', B' və C' nöqtələrinə çevrilirsə, bu çevirmə zamanı $\rho(A, B, C) = \rho'(A', B', C')$ ödənərsə, belə çevrilməyə afin çevrilməsi deyilir. Yəni bir düz xətt üzərində olan üç nöqtə bu çevirmə zamanı üç nöqtənin sadə nisbətini dəyişmirsə, belə çevrilməyə afin çevrilməsi deyilir. Qeyd edək ki, oxşar çevirmə afin çevrilməsinin xüsusi halıdır və afin çevrilməsi üçün aşağıdakı teoremi doğrudur.

Teorem: R və R' nizamlanmış reperlədirsə, onda elə bir yeganə afin çevrilməsi var ki, M -i M' -ə çevirir və M' -in R' reperinə nəzərən koordinatları M -in R -ə nəzərən koordinatlarına bərabərdir. Afin çevrilməsini koordinatlarla ifadə edək. Fərz edək ki, R reperi və f afin çevrilməsi verilmişdir. R -ə uyğun reperi R' -lə işarə edək və fərz edək ki, f çevrilməsi zamanı müstəvinin ixtiyari

M nöqtəsi M' nöqtəsinə çevrilir və bu çevirmə qarşılıqlı birqiymətlidir.

M nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları (x, y) olsun. (f) çevirməsi

zamanı $R \rightarrow R'$ çevrilirsə, onda M' nöqtəsinin R' reperinə nəzərən koordinatları

(x, y) olar. M' nöqtəsinin R -ə nəzərən koordinatlarını (x', y') ilə işarə edək. Onda

f çevirməsi ümumiləşmiş koordinat sisteminin çevrilməsi olduğuna görə

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0 \end{cases}$$

yaza bilərik. Başqa sözlə, sonuncu düstur M -in R -ə və R' reperinə nəzərən

koordinatları arasındakı əlaqədir. Burada (c_{11}, c_{21}) və (c_{12}, c_{22}) ikinci koordinat

sisteminin vahid vektorlarının birinci koordinat sistemində nəzərən

komponentləridir.

VI FƏSİL İKİTƏRTİBLİ ƏYRİLƏR

§1. ELLİPS

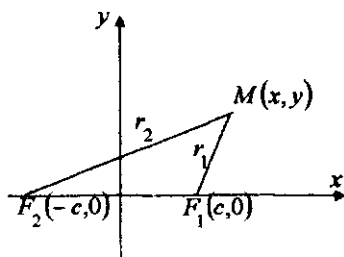
Müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtədən məsafələrinin cəmi sabit olan nöqtələrin həndəsi yerinə ellips deyilir. Verilmiş nöqtələri F_1 və F_2 ilə işarə edək və onlar arasında olan məsafə $2c$ olsun.

Koordinat başlanğıcını $\overline{F_1 F_2}$ parçasının orta nöqtəsində elə götürək ki, absis oxu bu nöqtələrdən keçsin. Tərifdə deyilən sabit məsafəni $2a$ ilə işarə etsək. Müstəvi üzərində verilmiş $M(x, y)$ nöqtəsinin ellipsə mənsub olması üçün

$$|r_1 + r_2| = 2a \quad (1)$$

şərti ödənməlidir. Burada $\vec{r}_1$ və $\vec{r}_2$ M nöqtəsinin fokus radius vektorları adlanır.

$F_1(c, 0)$ və $F_2(-c, 0)$ nöqtələri ellipsin fokus nöqtələri adlanır.



Şəkildən görünür ki,

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} ; r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Bu qiymətləri (1) bərabərliyində nəzərə alsaq $M(x,y)$ nöqtəsinin ellips üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

bərabərliyinin ödənməsi olar. Bu tənlikdə radikalları yox etsək

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Burada $b^2 = a^2 - c^2$ işarə edilmişdir və $a > c$ ödənilir.

Bu tənliyə ellipsin kanonik tənliyi deyilir. Deməli $M(x,y)$ nöqtəsinin ellips üzərində olması üçün onun koordinatları (2) tənliyini ödəməlidir.

Tutaq ki, $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsi ellips üzərindədir. Bu nöqtənin koordinatlarını (2) tənliyində yazsaq

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

alırıq. Buradan $y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} \right)$ olar. Bu qiyməti $\bar{r}_1$ və $\bar{r}_2$ fokal radiusların

ifadələrində nəzərə alsaq

$$r_1 = \pm \left(a - \frac{c}{a} x_1 \right)$$

$$r_2 = \pm \left(a + \frac{c}{a} x_1 \right)$$

olar.

Burada işarələr elə seçilməlidir ki, sağ tərəf müsbət işarəli olsun. Şərtə görə

$a > c$ onda $\frac{c}{a} < 1$ olur. (2) tənliyindən $|x| < a$ olduğu görünür. Onda

$$a - \frac{c}{a} x_1 > 0; \quad a + \frac{c}{a} x_1 > 0$$

şərtləri ödənilir. Ona görə də fokal radiuslar üçün

$$r_1 = a - \frac{c}{a} x; \quad r_2 = a + \frac{c}{a} x$$

götürmək olar. r_1 və r_2 -nin bu qiymətlərini (1) tənliyində nəzərə alsaq həmin

bərabərliyin ödəndiyini görürük. Yəni $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsi ellips üzərindədir. (2)

kanonik tənliyindən istifadə edərək ellips üçün aşağıdakı xassələri müəyyənləşdirmək olar.

1) x və y dəyişənləri (2) bərabərliyində cüt qüvvətdə daxil olduğuna görə Ox və Oy oxları ellipsin simmetriya oxları olur. Koordinat başlanğıcı simmetriya mərkəzidir. Bu o deməkdir ki, $M(x, y)$ nöqtəsi ellips üzərindədirsə, $M_1(-x, y)$, $M_2(-x, -y)$, $M_3(x, -y)$ nöqtələri də ellips üzərindədir.

2) (2) tənliyindən görünür ki, $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ şərtləri ödənilir, yəni ellips məhdud əyridir. Ellips tamamilə

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \end{cases}$$

düzbucaqlısı daxilində yerləşir.

3) Əgər (2) tənliyində $y=0$ olsa, $x=\pm a$ olur. $x=0$ olsa, $y=\pm b$ olar. Deməli, ellips $A_2(-a,0)$, $A_1(a,0)$, $B_2(-b,0)$, $B_1(b,0)$ nöqtələrində koordinat oxları ilə kəsişir. Həmin nöqtələrə ellipsin təpələri deyilir. $A_1A_2=2a$ ellipsin böyük oxu, $B_1B_2=2b$ ellipsin kiçik oxu adlanır. Uyğun olaraq bəzən a -ya böyük yarım ox, b -yə isə kiçik yarım ox deyilir. Əgər $a=b$ olarsa, onda ellips çevrəyə çevrilir. Deməli, çevrəni bərabər paylanmış yüklə sıxsaq ellips alırıq. Ellipsin fokusları arasındakı məsafənin böyük oxa olan nisbətinə ellipsin eksentrisiteti deyilir və $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ ilə təyin edilir. Aydındır ki, ellips üçün $e < 1$ şərti ödənilir. Qeyd edək ki, eksentrisitet ellipsin qabırqlıq dərəcəsini təyin edir. Yəni e daha çox olsa ellips çevrədən bir o qədər fərqlənir.

4) Ellips koordinat oxlarına və başlanğıcına görə simmetrik olduğu üçün onun birinci rübdəki hissəsini qursaq onu tam qurmuş olarıq.

Birinci rübdə $x, y \geq 0$ olduğuna görə (2) tənliyindən

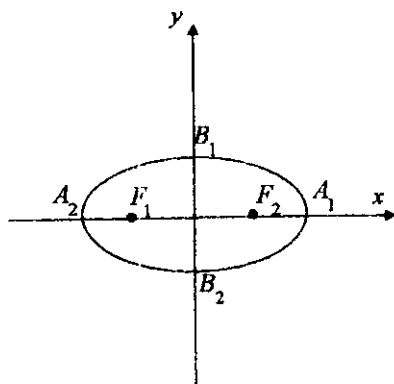
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

alırıq. Bu bərabərlikdən görünür ki, x dəyişəni a -dan sıfıra qədər dəyişdikdə, y dəyişəni sıfırdan b -yə qədər dəyişir.

5. Verilmiş $x = a_1 t$ və $y = b_1 t$ xətləri ilə ellipsin kəsişmə nöqtələrini təyin edək. Bu qiymətləri (2) bərabərliyində nəzərə alsaq

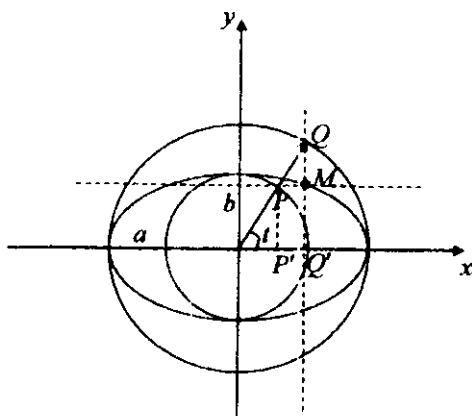
$$\left(\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{b_1^2}{b^2} \right) t^2 = 1$$

alırıq. Bu tənliyin iki müxtəlif həqiqi kökü var, ona görə də deyə bilərik ki, düz xətlər ellipsi iki nöqtədə kəsir. Ellips qapalı əyridir.



6. Ellipsin parametrik tənliyini təyin edək. Radiusları a , b olan çevrənin mərkəzini ellipsin mərkəzi ilə eyni götürək və mərkəzdən hər hansı bir düz xətt

keçirək. Bu düz xəttin çevrə ilə kəsişmə nöqtəsini P və Q ilə işarə edək. Düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaq t olsun. P nöqtəsindən absis oxuna, Q nöqtəsindən isə ordinat oxuna paralel düz xətt keçirək. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsi $M(x,y)$ olsun. Bu nöqtənin ellips üzərində olduğunu göstərək. Bunun üçün həmin nöqtənin koordinatlarını təyin edək.



Şəkildən görünür ki, $x = a \cos t$. Digər tərəfdən $y = PP' = MQ = b \sin t$. Bu ifadələri (2) tənliyində nəzərə alsaq

$$\frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} = 1$$

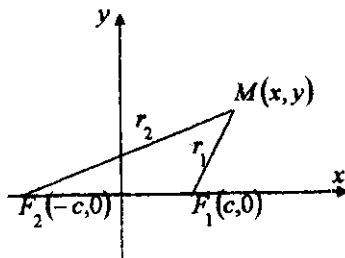
olar. Deməli koordinatları

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (3)$$

olan nöqtə ellips üzərindədir. (3) tənliyinə ellipsin parametrik tənlikləri deyilir. t – isə parametr adlanır və $0 \leq t \leq 2\pi$ qəbul edilir.

§2. HİPERBOLA

Müstəvi üzərində verilmiş iki nöqtədən məsafələrinin fərqi sabit olan nöqtələrin həndəsi yerinə hiperbola deyilir. Verilmiş nöqtələri F_1 və F_2 ilə işarə edək və bu nöqtələr arasındakı məsafə $2c$ olsa, onda onların koordinatları $F_1(c,0)$ və $F_2(-c,0)$ olar.



Əgər koordinat başlanğıcını $2c$ parçasının orta nöqtələrində yerləşdirsək və tərifdə deyilən məsafəni $2a$ –ilə işarə etsək, onda ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsinin hiperbola üzərində yerləşməsi üçün

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (1)$$

şərti ödənməlidir. F_1 və F_2 hiperbolanın foks nöqtələri isə $\bar{r}_1$ və $\bar{r}_2$ həmin foksılara uyğun fokal radiuslardır. Deməli, nöqtənin hiperbola üzərində yerləşməsi üçün onun koordinatları (1) tənliyini ödəməlidir. Şəkildən görünür ki,

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} ; \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Bu qiymətləri (1) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

olar.

Bu bərabərlikdə radikalları yox etsək

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

alırıq. Burada $b^2 = c^2 - a^2$ işarə olunmuşdur. (2) tənliyinə hiperbolanın kanonik tənliyi deyilir. Deməli, $M(x, y)$ nöqtəsi hiperbola üzərində olduqda onun koordinatları (2) tənliyini ödəyir. İndi göstərək ki, koordinatları (2) tənliyini ödəyən nöqtələr hiperbola üzərindədir.

Fərz edək ki, $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyir. Yəni

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ buradan } y_1^2 = b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - 1 \right) \text{ olar. Əgər } y_1\text{-in bu qiymətlərini } r_1 \text{ və } r_2$$

fokal radiusların ifadələrində nəzərə alsaq $r_1 = \pm \left(\frac{c}{a} x_1 - a \right)$; $r_2 = \pm \left(\frac{c}{a} x_1 + a \right)$ olar. Bu

bərabərliyin sağ tərəfində işarə elə seçilməlidir ki, (1) şərti ödənsin $c > a$ -dır.

Onda $\frac{c}{a} > 1$ olar. $|x| \leq a$ olduğuna görə sonuncu bərabərlikdən $x > 0$,

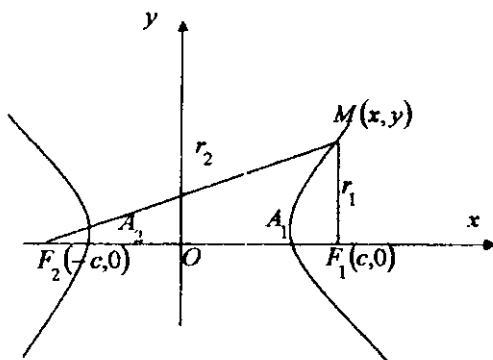
$r_1 = \frac{c}{a} x_1 - a$; $r_2 = \frac{c}{a} x_1 + a$ yazı bilərik. Deməli, bu qiymətləri (1) tənliyində nəzərə

alsaq, onda həmin tənliyin ödəndiyini görürük, yəni M_1 nöqtəsi hiperbola üzərindədir. Hiperbolanın (2) kanonik tənliyindən istifadə etsək, aşağıdakı xassələri təyin etmək olar.

1) (2) tənliyinə x və y dəyişənləri cüt qüvvətdən daxil olduğuna görə koordinat oxları hiperbolanın simmetriya oxlarıdır. Koordinat mərkəzi simmetriya mərkəzidir.

2) (2) tənliyində $y = 0$ olduqda $x = \pm a$ olur. Deməli, hiperbola absis oxu ilə iki nöqtədə kəşişir. Bu nöqtələrə hiperbolanın təpə nöqtələri deyilir. Yəni, $A_2(-a, 0)$ və $A_1(a, 0)$ hiperbolanın təpə nöqtələri adlanır. (2) tənliyində $x = 0$ olsa, $y \neq \pm b$ olduğuna görə hiperbolanın ordinat oxu ilə kəşişmə nöqtəsi yoxdur. Absis oxuna hiperbolanın həqiqi oxu, ordinat oxuna isə xəyali oxu deyilir. Hiperbolanın fokusları həmişə həqiqi ox üzərində yerləşir.

3) (2) tənliyində $y = 0$; $x = \pm a$ olduğuna görə $[-a, a]$ parçasında, başqa sözlə $x = -a$, $x = a$ aralığında hiperbolanın nöqtələri yoxdur. Hiperbola $x = -a$ düz xəttindən solda, $x = a$ düz xəttindən sağda yerləşir. Hiperbolanın sağ və sol yarım müstəvilərdə yerləşən hissələrinə onun sağ və sol vərəqləri deyilir.



(2) tənliyindən

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

olar. Buradan görünür ki, $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ yaxınlaşır. Yəni hiperbola qapalı əyri deyil. Bu bərabərlikdə $|x| \geq a$ olduqda ifadənin mənası var. $x = a_1 t$ və $y = b_1 t$ xətləri ilə hiperbolanın kəsişmə nöqtəsini təyin edək. Əgər bu qiymətləri (2) tənliyində nəzərə alsaq, onda

$$\left(\frac{a_1^2}{a^2} - \frac{b_1^2}{b^2} \right) t^2 = 1$$

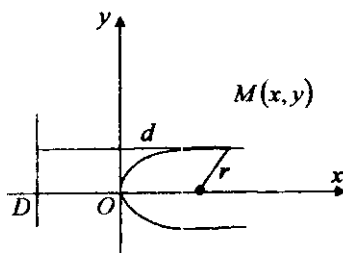
alarıq. Buradan görünür ki, $\frac{a_1^2}{a^2} - \frac{b^2}{b^2} > 0$ olar. Bu xətlər hiperbolanı iki nöqtədə kəsir. Əgər həmin ifadə kiçikdir sıfır olarsa, onda onların ortaq nöqtəsi yoxdur.

§3. PARABOLA

Müstəvi üzərində verilmiş nöqtədən və direktrissa adlanan verilmiş düz xətdən məsafələri bərabər olan nöqtələrin həndəsi yerinə parabola deyilir. Müstəvi üzərində ixtiyari bir F nöqtəsi qeyd edib bu nöqtədən D -direktrissaya perpendikulyar düz xətt çəkək və $|DF| = p$ qəbul edək. Koordinat başlanğıcını bu parçanın orta nöqtəsində yerləşdirək və absis oxu həmin parça ilə üst-üstə düşsün. Onda fokus nöqtəsinin koordinatları $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, direktrissa tənliyi isə $x = -\frac{p}{2}$ olar. Müstəvi üzərində ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsi götürək. Deməli, şərtə görə bu nöqtə parabola üzərindədirsə,

$$r = |d| \quad (1)$$

bərabərliyi ödənər.



Şəkildən görünür ki,

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = x + \frac{p}{2}$$

bu qiymətləri (1) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

alırıq. Bu tənliyi radikalдан azad etsək onda

$$y^2 = 2px \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Deməli, biz göstərdik ki, M nöqtəsi parabola üzərindədirsə, onda onun koordinatları (1) və yaxud (2) tənliyini ödəyir. Göstərək ki, koordinatları (2) tənliyini ödəyən nöqtə parabola üzərindədir. Fərz edək ki, $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyir, onda

$$y_1^2 = 2px_1$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = x_1 + \frac{p}{2} = d$$

olar. Deməli, həmin nöqtə parabola üzərindədir. (2) tənliyi parabolunun kanonik tənliyi adlanır. p -isə parametr adlanır. (2) tənliyinə əsasən parabolunun aşağıdakı xassələrini təyin etmək olar:

1) (2) tənliyindən görünür ki, x -həmişə müsbət qiymət alır. Yəni, $M(x, y)$ nöqtəsi parabola üzərindədirsə, $M_1(x, -y)$ nöqtəsi də parabola üzərində olar. Bu o deməkdir ki, absis oxu parabolunun simmetriya oxudur.

2) (2) tənliyindən görünür ki, $x=0, y=0$ olur. Yəni, parabola koordinat başlanğıcından keçir. Başqa sözlə, parabolunun simmetriya oxu ilə kəsişmə nöqtəsi koordinat başlanğıcıdır.

3) (2) tənliyindən görünür ki, $x \rightarrow \infty$ olduqda $y \rightarrow \infty$ olur. Yəni, parabola qapalı əyri deyil.

4) (2) tənliyindən görünür ki, $x \geq 0$, yəni, parabola sağ yarımmüstəvidə yerləşir.

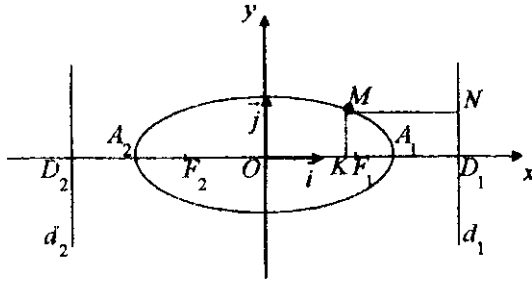
§4. ELLİPSİN, HİPERBOLANIN DİREKTRİSLƏRİ VƏ ONUN DİREKTRİAL XASSƏLƏRİ.

Ellipslə (hiperbola ilə) bir müstəvidə yerləşən ordinat oxundan $\frac{a}{e}$ məsafədə

ona paralel keçən düz xəttə ellipsin (hiperbolanın) direktrisləri deyilir. Əgər

$F_1(c,0)$ foksuna uyğun direktrisi d_1 ilə, $F_2(-c,0)$ foksuna uyğun direktrisi d_2 ilə

işarə etsək, onda onların tənliyini uyğun olaraq $x = \frac{a}{e}$, $x = -\frac{a}{e}$ yazı bilərik.



Hiperbolanın və ellipsin iki direktrisi var və onların hər biri uyğun fokusun yerləşdiyi yarımmüstəvidə yerləşir. Göstərmək olar ki, ellipsin bütün nöqtələri onun direktrisləri arasında yerləşir. Doğrudan da, ellipsin təpə nöqtələri $A_2(-a,0)$ və $A_1(a,0)$ arasındakı məsafə $\rho(A_1, A_2) = 2a$ olar. Direktrislər arasındakı məsafə isə $\rho(D_1, D_2) = \frac{2a}{e}$ -dir. Ellips üçün $e < 1$ olduğuna görə $\rho(A_1, A_2) < \rho(D_1, D_2)$ olur. Çünki $\frac{2a}{e} > 2a$. Deməli, bu son bərabərlik göstərir ki, ellipsin bütün nöqtələri

onun direktrisləri arasında yerləşir. Eyni qayda ilə hiperbola üçün $e > 1$ olduğunu nəzərə alsaq göstərmək olar ki, onun direktrisləri arasında heç bir nöqtəsi yoxdur.

Teorem: Ellipsin (hiperbolanın) ixtiyari nöqtəsindən onun foksuna qədər olan məsafənin uyğun direktrisinə qədər məsafəyə nisbəti sabit kəmiyyət olub eksentrisitetinə bərabərdir. Yəni,

$$\frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, N)} = e \quad (1)$$

İsbat: Ellips üçün

$$r_1 = \left| a - \frac{e}{a}x \right|$$

$$r_1 = a - \frac{e}{a}x = a - ex$$

Direktrisin tənliyi $x = \frac{a}{e}$ olduğuna görə

$$\rho(M, N) = KD_1 = \frac{a}{e} - OK = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}$$

onda (1) bərabərliyini almaq üçün

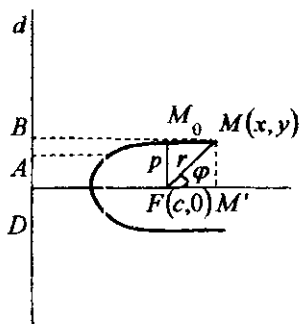
$$\frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, N)} = \frac{a - ex}{\frac{a - ex}{e}} = e$$

alırıq. Deməli, ellips üçün hər bir nöqtənin direktrisdən və foksdan olan məsafələri nisbəti vahiddən kiçikdir. Hiperbolanın hər bir nöqtəsinin foksdan və

direktrisdən olan məsafələrinin nisbəti isə vahiddən böyükdür. Parabolanın tərifində isə parabolanın nöqtəsinin fokusdan və direktrisdən olan məsafələri bərabər olduğuna görə onların nisbəti vahidə bərabərdir. Ona görə də parabolanın eksentrisitetini vahid qəbul edirik.

§5. ELLİPSİN, HİPERBOLANIN VƏ PARABOLANIN POLYAR KOORDİNAT SİSTEMİNDƏ TƏNLİKLƏRİ.

Fərz edək ki, ellips, hiperbola və parabola, (r, φ) polyar koordinat sistemində verimişdir. $F(c, 0)$ onun fokus nöqtəsidir. d isə həmin əyrinin direktrissasıdır. Fokus nöqtədən direktrise perpendikulyar düz xətt çəkək. Fərz edək ki, bu düz xətt polyar oxla üst-üstə düşür. Fokus nöqtəsi isə polyar mərkəzlə üst-üstə düşür. Müstəvi üzərində ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsi götürək və fərz edək ki, həmin nöqtənin polyar koordinatları (r, φ) -dir.



Əgər M nöqtəsi ikitərtibli əyri üzərindədirsə, onda bu nöqtənin koordinatlarından istifadə edərək əyrinin tənliyini polyar koordinatlarla təyin edə bilərik. $M(x, y)$ nöqtəsindən polyar oxa perpendikulyar endirək və onun kəsişməsini M' -lə işarə edək. $F(c, 0)$ foks nöqtəsindən direktrissaya paralel düz xətt qaldırıq və onun ellipslə kəsişmə nöqtəsini M_0 ilə işarə edək. FM_0 -parçasının uzunluğunu p ilə işarə edək və fərz edək ki, M nöqtəsinin radius vektorundan və əvvəlki teoremdən istifadə etsək, onda M nöqtəsi üçün

$$\frac{\rho(MF)}{\rho(MB)} = e \text{ yazı bilərik. Aydındır ki, } \rho(MF) = r, \rho(MB) = \frac{r}{e} \text{ olar.}$$

$$\rho(MB) = \rho(DM') = \rho(MF) + \rho(FD) \quad (1)$$

Burada

$$\rho(MF) = r \cos \varphi. \quad (2)$$

Əgər həmin teoremi M_0 nöqtəsi üçün tətbiq etsək, onda $\frac{\rho(M_0 F)}{\rho(M_0 A)} = e$ alırıq.

$\rho(M_0 F) = p$ olduğundan

$$\rho(M_0 A) = \frac{p}{e}$$

yaxud

$$\rho(M_0 A) = \rho(DF) = \frac{p}{e} \quad (3)$$

Əgər (2) və (3) qiymətlərini (1) bərabərliyində nəzərə alsaq $\frac{r}{e} = r \cos \varphi + \frac{p}{e}$

alırıq. Burada r -i təyin etsək:

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \quad (4)$$

alırıq. Bu tənlik polyar koordinatlarla iktörtüblü əyrilərin tənliyidir. Belə ki, $e < 1$ olduqda (4) tənliyi ellipsin tənliyi, $e > 1$ olduqda hiperbolanın, $e = 1$ olduqda isə parabolanın tənliyi olur.

§6. İKİTƏRTİBLİ ƏYRİLƏRİN ÜMUMİ TƏNLİYİ.

Bilirik ki, istənilən afin $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koordinat sistemində müstəvinin hər bir nöqtəsinə bir cüt həqiqi (x, y) ədədlər uyğundur və əksinə, hər bir cüt həqiqi ədədə müstəvinin bir nöqtəsi uyğundur. Əgər müstəvinin nöqtələrinin koordinatlarından biri yaxud hər ikisi kompleks ədəd olarsa, onda bu nöqtəyə müstəvinin xəyali nöqtəsi, müstəviyə isə kompleks müstəvi deyilir. Əgər müstəvinin iki M_1 və M_2 nöqtələri aşağıdakı kimi təyin olunmuşdursa

$$M_1(a + ib, c + id) \text{ və } M_2(a - ib, c - id)$$

onda bu nöqtələrə qoşma xəyali nöqtələr deyilir. İstənilən parçanın uc nöqtələri qoşma xəyali nöqtələr olarsa, onda bu parçanın orta nöqtəsinin koordinatları həqiqi ədəd olar. $\overline{M_1 M_2}$ parçasının orta nöqtəsinin koordinatlarını (x, y) ilə işarə etsək,

$$x = \frac{a + ib + a - ib}{2} = a$$

$$y = \frac{c + id + c - id}{2} = c$$

olar. Müstəvidə ixtiyari koordinat sistemində ümumi şəkildə ikitərtibli cəbri xətlər aşağıdakı tənlik vasitəsilə təyin edilir.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

Bu tənlikdə a_{11}, a_{12}, a_{22} əmsallarının üçü də eyni zamanda sıfıra bərabər olmadıqda (1) tənliyi ikitərtibli əyrini təyin edir. Üçü də sıfıra bərabər olarsa, onda tənlik birtərtibli əyrini təyin edir. (1) tənliyini aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$F(x, y) = F_1(x, y)x + F_2(x, y)y + F_0(x, y)$$

Burada

$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10}$$

$$F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{20}$$

$$F_0(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{20}y$$

işarə edilmişdir. Qeyd edək ki, ikitərtibli əyrilərdən bəziləri ilə (hiperbola, parabola, ellips) məşğul olmuşduq. Lakin elə ikidərəcəli tənlik var ki, onlar müstəvi üzərində müxtəlif həndəsi fiqurlar təyin edir. Məsələn:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

tənliyi müstəvi üzərində iki düz xətt təyin edir. $x^2 + y^2 = -3$ tənliyi xəyali çevrəni

təyin edir. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ tənliyi müstəvi üzərində $O(0,0)$ nöqtəsini təyin edir.

Deməli, (1) tənliyinin formasından asılı olaraq bu tənlik müstəvi üzərində müxtəlif həndəsi fiqurlar təyin edər.

§7. İKİTƏRTİBLİ ƏYRİ İLƏ DÜZ XƏTTİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ.

Fərz edək ki, ikitərtibli γ əyrisi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

tənliyi ilə l düz xətti isə parametrik şəkildə

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases} \quad (2)$$

tənlikləri ilə verilmişdir. Burada p_1 və p_2 ədədləri l düz xəttinin $\bar{p}$ yönəldici vektorunun koordinatlarıdır, yəni, $\bar{p} = \{p_1, p_2\}$. Aydındır ki, l düz xətti ilə γ ikitərtibli əyrinin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün (1) və (2) tənliklər sistemini həll etmək lazımdır. Əgər (2) tənliyini (1) tənliyində nəzərə alsaq, onda

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (3)$$

şəklində tənlik alırıq. Burada P, Q, R aşağıdakı şəkildə təyin edilir.

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{11}x_0p_1t + a_{11}p_1^2t^2 + (2a_{12}x_0 + 2a_{12}p_1t)(y_0 + p_2t) + a_{22}y_0^2 +$$

$$+ 2a_{22}y_0p_2t + a_{22}p_2^2t^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{10}p_1t + 2a_{20}y_0 + 2a_{20}p_2t + a_{00} = 0$$

t -nin dərəcəsinə görə qruplaşdırısaq,

$$t^2(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2) + 2t(a_{11}x_0p_1 + a_{12}x_0p_2 + a_{12}y_0p_1 +$$

$$+ a_{22}y_0p_2 + a_{10}p_1 + a_{20}p_2) + (a_{11}x_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}) = 0$$

Əgər sonuncu bərabərlikdə əmsalları təyin etsək, onda (3) tənliyinin

əmsalları üçün

$$P = a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2$$

$$Q = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2$$

$$R = F(x_0, y_0)$$

ifadələrini alırıq. Buradan görünür ki, ikitərtibli γ əyrisi ilə düz xəttin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün (3) kvadrat tənliyini həll etmək lazımdır. Burada

$$t = \frac{-Q \pm \sqrt{a^2 - PR}}{P}$$

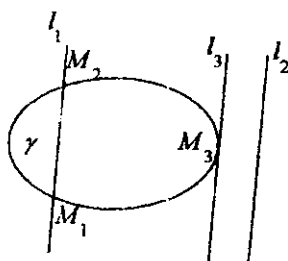
olduğundan aşağıdakı hallar ola bilər:

1) $\Delta = Q^2 - PR > 0$ olarsa, (3) tənliyinin iki həqiqi kökü var və bu o deməkdir

ki, l düz xətti γ ikitərtibli əyrisini iki M_1 və M_2 nöqtələrində kəsir.

2) $\Delta < 0$ olarsa, (3) tənliyinin iki kompleks kökü var və düz xətt ikitərtibli

əyrini iki xəyali nöqtədə kəsir. Yəni, l düz xətti ilə γ ikitərtibli əyrisinin ortaq nöqtəsi yoxdur.



3) $\Delta = 0$ olarsa, (3) tənliyinin bir kökü var və bu halda l düz xətti əyrini bir

nöqtədə kəsir.

Əgər (3) tənliyində $P = 0$ olarsa, həmin tənliyi

$$2Qt + R = 0$$

(4)

şəklində yazmaq olar.

Burada $R=0$ olarsa, $Q \neq 0$ olduğundan tənliyin bir $t=0$ kökü var. Bu halda ikitərtibli əyri ilə düz xəttin yalnız bir kəsişmə nöqtəsi var.

$Q=0$, $R \neq 0$ olarsa, onda tənliyin həlli yoxdur.

Əgər $Q=0$, $R=0$ olarsa, onda tənliyin sonsuz sayda həlli var. Bu o deməkdir ki, əyri ilə düz xətt üst-üstə düşür.

§8. İKİTƏRTİBLİ ƏYRİYƏ NƏZƏRƏN ASİMPOTOTİK İSTİQAMƏTLƏR.

Fərz edək ki, ikitərtibli γ əyrisi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

tənliyi ilə l düz xətti isə

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$$

tənlikləri ilə verilmişdir və bu düz xəttin yönəldici vektoru $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ vektorudur.

Əgər l düz xətti ikitərtibli γ əyrisini bir çox nöqtədə kəsirsə, yaxud onunla üst-

üstə düşürsə, onda bu düz xəttin yönəldici $\vec{p}$ vektorunun istiqamətinə ikitərtibli γ əyrisinə nəzərən asimptotik istiqamət deyilir.

Ayındır ki, bu halda

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (2)$$

tənliyində $P = 0$ şərti ödənməlidir. Başqa sözlə

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \quad (3)$$

olmalıdır. Buradan

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0 \quad (4)$$

alınır. Burada $k = \frac{p_1}{p_2}$; (4) tənliyindən

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

alırıq. Tutaq ki, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Onda aşağıdakı hallara baxaq.

1) Əgər $\Delta < 0$ olarsa, onda (4) tənliyinin iki müxtəlif həqiqi kökü var. Bu halda əyrinin iki asimptotik istiqaməti var.

2) $\Delta > 0$ olduqda tənliyin həlli yoxdur. Bu halda ikitərtibli əyrinin asimptotik istiqaməti yoxdur.

3) $\Delta=0$ olduqda tənliyin bir kökü var. Onda əyrinin bir asimptotik istiqaməti olar.

Ona görə də bu xassələrdən istifadə edərək (4) tənliyinin təyin etdiyi ikitərtibli əyriləri aşağıdakı növlərə bölmək olar.

1) Əgər əyrinin asimptotik istiqaməti yoxdursa, onda bu əyriyə elliptik əyrilər deyilir.

2) Əgər əyrinin iki asimptotik istiqaməti varsa, belə əyriyə hiperbolik əyri deyilir.

3) Əgər əyrinin bir asimptotik istiqaməti varsa, belə əyriyə parabolik əyri deyilir.

§9. İKİTƏRTİBLİ ƏYRİNİN MƏRKƏZİ.

Fərz edək ki, ikitərtibli γ əyrisi (1) tənliyi ilə verilmişdir.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

l -düz xətti isə

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + p_1 t \\ y &= y_0 + p_2 t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

tənliyi ilə təyin olunur.

Lemma. $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin ikitərtibli γ əyrisinin $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$ vektoru

istiqamətində olan vətərin orta nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt

$$Q = F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0 \quad (3)$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

İsbat: Fərz edək ki, γ əyrisi ümumi şəkildə verilmiş ikitərtibli əyridir. Vətər $\vec{p}$ vektoruna paraleldir və bu vətərlə üst-üstə düşən düz xətt (2) tənlikləri ilə verilmişdir.

Tutaq ki, M_0 nöqtəsi vətərin ixtiyari nöqtəsidir. Vətər ikitərtibli γ əyrisini iki nöqtədə kəsir. Bu halda

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (4)$$

tənliyində t parametrinin iki qiyməti (2) tənliyi ilə verilmiş düz xəttin ikitərtibli γ əyri ilə kəsişmə şərti olduğuna görə vətərin əyri ilə kəsişmə nöqtələri t_1 və t_2 qiymətlərinə uyğundur. Əgər bu nöqtələri M_1 və M_2 ilə işarə etsək, (2) tənliyindən istifadə etməklə həmin nöqtələrin koordinatlarını

$$M_1(x_0 + p_1 t_1, y_0 + p_2 t_1)$$

$$M_2(x_0 + p_1 t_2, y_0 + p_2 t_2)$$

şəklində təyin etmək olar.

Onda M_0 nöqtəsinin $\overline{M_1 M_2}$ vətərinin orta nöqtəsi olması üçün

$$x = \frac{2x_0 + p_1(t_1 + t_2)}{2}$$

$$y = \frac{2y_0 + p_2(t_1 + t_2)}{2}$$

bərabərlikləri ödənməlidir. Bu bərabərliklərdən görünür ki, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi vətərin orta nöqtəsi olduqda, $t_1 + t_2 = 0$ olur. Digər tərəfdən, Viyet teoreminə görə $t_1 + t_2 = -2Q = 0$ yaxud $Q = 0$ olar. Bu isə (3) bərabərliyi deməkdir. Yəni, M_0 nöqtəsi vətərin orta nöqtəsidirsə, onda (3) bərabərliyi ödənməlidir. İkitərtibli əyrinin simmetriya mərkəzinə həmin əyrinin mərkəzi deyilir. Əgər γ ikitərtibli əyrisi $F(x, y) = 0$ tənliyi ilə verilmişdirsə, onda mərkəzin koordinatları

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ F_2(x, y) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

tənliklər sistemindən tapılır. (5) tənliyi x və y dəyişənlərinə görə xətti tənliklər sistemidir. Bu tənliyin həllinin xassələrindən asılı olaraq ikitərtibli əyrinin mərkəzi aşağıdakı kimi təyin edilir.

1) Əgər $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ olarsa, onda (5) tənliyinin bir həlli var. Onda

ikitərtibli γ əyrisinin yeganə mərkəzi var.

2) Əgər $\Delta = 0$ olarsa, Δ_1 və Δ_2 determinantlardan heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidirsə, onda sistemin həlli yoxdur. Bu isə o deməkdir ki, ikitərtibli əyrinin mərkəzi yoxdur.

3) Əgər $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ olarsa, onda (5) tənliklər sisteminin sonsuz sayda həlli var. Yəni, ikitərtibli əyrinin sonsuz sayda mərkəzi var. Müstəvidə mərkəzi nöqtələr çoxluğu düz xətt təşkil edir və bu düz xəttə ikitərtibli əyrinin mərkəzi düz xətti deyilir. Bu halda ikitərtibli əyri iki düz xəttə parçalanır. Mərkəzdən keçən əyriyə mərkəzi əyri deyilir.

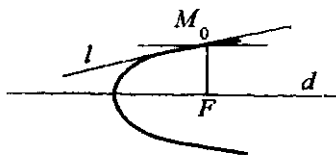
§10. İKİTƏRTİBLİ ƏYRİNİN TOXUNANI VƏ DİAMETRİ.

Əgər ikitərtibli əyrinin mərkəzi bu əyri üzərində olarsa, onda bu nöqtə ikitərtibli əyrinin məxsusi nöqtəsidir. İkitərtibli əyrinin qalan nöqtələri isə adi nöqtə adlanır.

Teorem: Əgər l düz xətti γ ikitərtibli əyri ilə yalnız üst-üstə düşürsə, iki nöqtədə kəsişirsə, onda bu düz xətt həmin nöqtədə γ ikitərtibli əyrisinə çəkilmiş toxunandır və toxunanın tənliyi

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0 \quad (1)$$

şəklindədir.



İsbatı: Fərz edək ki, l düz xətti

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + p_1 t \\ y &= y_0 + p_2 t \end{aligned} \right\}$$

tənliyi ilə verilmişdir və γ ikitərtibli əyrisinə $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ afin koordinat sistemində toxunma nöqtəsi $M_0(x_0, y_0)$ -dir. Şərtə görə, toxunma nöqtəsi üst-üstə düşən iki nöqtədir. Deməli, bu nöqtə

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \quad (2)$$

tənliyinin iki qiymətinə uyğundur və bu köklərin hər biri $t = t_1 = t_2 = 0$ şəklindədir.

Bu isə onu göstərir ki, l düz xəttinin parametrik tənliyindən hər dəfə t parametrinə $t_1 = 0$ və $t_2 = 0$ qiymətini verdikdə eyni bir $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsini təyin edirik, yəni, l düz xətti ilə γ ikitərtibli əyrisi M_0 nöqtəsində kəşisir. $M_0 \in \gamma$ olduğuna görə $F(x_0, y_0) = 0$ və $t_1 + t_2 = 0$ olduğuna görə $Q = 0$ alınır. Bu şərtədən

$$F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0$$

yazmaq olar. Əgər bu bərabərlikdən $k = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}$ təyin edib toxunanın

$y - y_0 = k(x - x_0)$ tənliyində nəzərə alsaq, onda $y - y_0 = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}(x - x_0)$ olar. Bu

bərabərliyi sadələşdirib x və y -ə əsasən qruplaşdırsaq (1) tənliyini alırıq.

Doğrudan ikitərtibli əyriyə çəkilmiş toxunanın tənliyi (1) şəklindədir. Əgər (1)

tənliyini aşkar şəkildə yazsaq, onda toxunanın tənliyi

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0 \quad (3)$$

olar. (3) tənliyindən istifadə edərək ellips, hiperbola və parabolaya çəkilmiş

toxunanın tənliklərini aşağıdakı kimi təyin edə bilərik. Ellipsin kanonik tənliyini

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ikitərtibli əyrinin ümumi tənliyi ilə müqayisə etsək, onda

$a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1$ və qalan əmsalların hamısı sıfıra bərabərdir. Ona görə

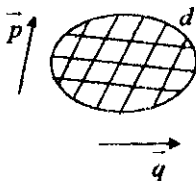
de bu qiymətləri (3) tənliyində nəzərə alsaq, ellipsə toxunanın tənliyini

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

şəklində təyin edirik. Eyni qayda ilə hiperbolanın və parabolanın toxunanının

tənliyini təyin etmək olar.

Fərz edək ki, ikitərtibli γ əyrisi və $\vec{p} = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ istiqaməti verilmişdir. $\vec{p}$ vektoruna paralel vətərlərin orta nöqtələri çoxluğuna həmin ikitərtibli əyrinin diametri deyilir. Əgər $\vec{q}$ vektoru $\vec{p}$ vektoruna qoşma paraleldirsə, onda $\vec{q}$ vektoruna nəzərən də diametri təyin etmək olar. Ona görə də bir-birinə paralel vətərlərin orta nöqtələrinin əmələ gətirdiyi diametrə qoşma diametrlər deyilir.



Əgər $\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorlarının istiqaməti qarşılıqlı perpendikulyar olarsa, onda bu istiqamətlərə ikitərtibli əyrinin baş istiqamətləri deyilir. Bilirik ki, ikitərtibli əyriyə çəkilmiş toxunanın əyri ilə bir ortaq nöqtəsi olması üçün

$$F_1(x, y)p_1 + F_2(x, y)p_2 = 0$$

bərabərliyi ödənməlidir. Əgər bu şərti aşkar şəkildə yazsaq

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10})p_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{20})p_2 = 0$$

olar. Sonuncu tənliyi x və y dəyişənlərinə görə qruplaşdırsaq

$$(a_{11}p_1 + a_{21}p_2)x + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)y + a_{10}p_1 + a_{20}p_2 = 0 \quad (4)$$

bərabərliyini alırıq. Bu tənlik (1) tənliyidir və düz xətt təyin edir. x və y dəyişənləri $\vec{p}$ vektoruna paralel olan vətərin cari nöqtəsinin koordinatları olduğuna görə (4) tənliyi diametrin tənliyidir, onda qoşma vektorların təyin etdiyi diametrlər də qoşma olar. (4) tənliyindən istifadə edərək qoşmalılıq şərtini

$$\frac{a_{11}p_1 + a_{21}p_2}{q_1} = \frac{a_{12}p_1 + a_{22}p_2}{q_2} \quad (5)$$

şəklində yazmaq olar. Ona görə də (5) qoşmalılıq şərti adlanır.

VII FƏSİL

FƏZA KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ.

§1. FƏZADA AFİN KOORDİNAT SİSTEMİ.

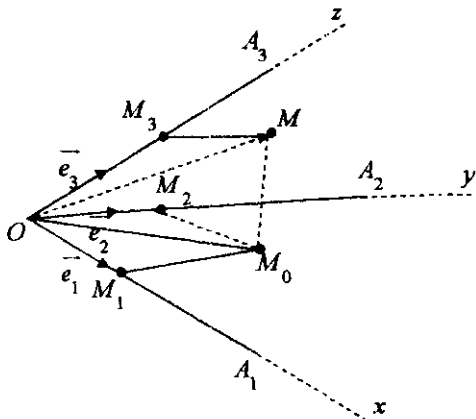
Bir müstəvi üzərində olmayan müəyyən qayda ilə götürülmüş ixtiyari dörd nöqtəyə fəzada ümumi koordinat sistemi yaxud afin koordinat sistemi deyilir və

$R = \{O, A_1, A_2, A_3\}$ kimi işarə olunur. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vektorları bazis olsa, afin reperini

$R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ şəklində də yazmaq olar. O nöqtəsi koordinat başlanğıcı, $O\vec{e}_1$ -dən

keçən ox absis, $O\vec{e}_2$ -dən keçən ox ordinat, $O\vec{e}_3$ -dən keçən ox aplikat oxu adlanır.

OXY , OXZ və OYZ – koordinat müstəviləri adlanır.



Afin reperinin köməyi ilə ixtiyari fəza nöqtəsinin koordinatlarını birqiy  m  tli təyin etmək olar. Fəzada ixtiyari M nöqtəsi götürüb, onun koordinatlarını təyin edək. Bunun   c  n $\overline{OM}$ radius vektorunu   k  k. Bu vektorun $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ bazisinə nəzərən koordinatlarına M nöqtəsinin $\{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ sistem  n   nəzərən koordinatları deyilir, yəni

$$\overline{OM} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3} \quad (1)$$

olsa, M nöqtəsinin koordinatları (x, y, z) olar. Deməli, fəzanın ixtiyari M nöqtəsinə (x, y, z)   d  dl  ri v   tərsinə hər bir (x, y, z)    l  y  n   fəzanın bir nöqtəsi uy  gundur.

  ndi isə koordinatlara görə n  qt  n  n qurulması məsələsinə baxaq:   kild  n görünür ki,

$$\overline{OM_1} = x\overline{e_1}, \overline{OM_2} = y\overline{e_2}, \overline{OM_3} = z\overline{e_3}$$

digər tərəfdən

$$\overline{OM_0} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$$

onda

$$\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{OM_3}$$

bərabərliyindən (1) bərabərliyi alınır. Deməli, M nöqtəsi (x, y, z) ədədlərinə uyğun nöqtədir. OM_1M_0M xətti koordinat sınıq xətti adlanır və nöqtəni birqiymətli təyin edir.

Koordinat müstəviləri fəzanı səkkiz hissəyə bölür və bu hissələrə oktanta deyilir. Hissələrin dördü OXY müstəvisindən yuxarıda, dördü isə aşağıda yerləşir. OYZ fəzanı iki yarımfəzaya ayırır, Ox -in müsbət tərəfindəki yaxın, mənfi tərəfindəki isə uzaq yarımfəza adlanır. Oxz - müstəvisinin ayırdığı yarımfəzalar Oy oxunun müsbət tərəfi sağ, mənfi tərəfi isə sol yarımfəzalar adlanır. OXY müstəvisinin ayırdığı yarımfəzalar üst və alt yarımfəzalar adlanırlar.

Əgər $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$ və $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ şərtləri ödənirsə, afin koordinat sistemi düzbucaqlı dekart koordinat sistemi yaxud ortonormal koordinat sistemi adlanır. Onda bazis vektorlar $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ qəbul edilir. İkiölçülü koordinat sistemində olduğu kimi fəzada da verilmiş iki $M_1(x_1, y_1, z_1)$ və $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

düsturu ilə hesablanır. Eyni zamanda bu məsafə uc nöqtələri M_1 və M_2 olan

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

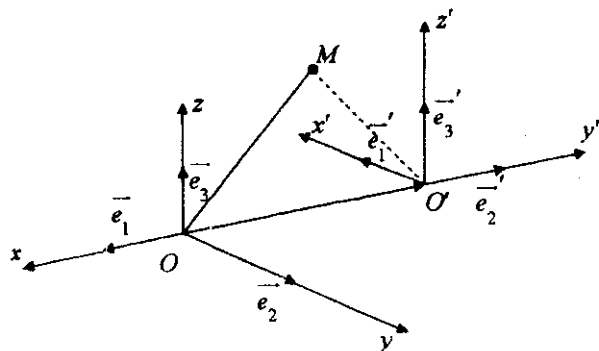
vektorunun uzunluğu və yaxud modulu olar. Aydındır ki, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ və $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verildikdə $\overline{M_1M_2}$ parçasını λ nisbətə bölən $M(x, y, z)$ nöqtəsinin koordinatları uyğun olaraq

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

düsturları ilə təyin olunur.

§2. FƏZADA AFİN KOORDİNAT SİSTEMLƏRİNİN ÇEVİRLMƏSİ.

Fərz edək ki, $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ və $R' = \{O', \overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \overline{e'_3}\}$ şəklində iki koordinat sistemi verilmişdir. Fəzada ixtiyari M nöqtəsi götürüb onun R koordinat sistemində nəzərən koordinatlarını (x, y, z) və R' koordinat sistemində nəzərən koordinatlarını (x', y', z') ilə işarə edib bu koordinatlar arasında əlaqə yaradaq.



R' reperinin $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ bazis vektorlarının R reperinə nəzərən koordinatları

$$\vec{e}_1' = \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}\}$$

$$\vec{e}_2' = \{\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}\}$$

$$\vec{e}_3' = \{\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}\}$$

və O' nöqtəsinin $\{O, x, y, z\}$ koordinat sistemində nəzərən koordinatları $\{x_0, y_0, z_0\}$

olsun. Onda

$$\begin{aligned}\vec{e}_1' &= \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{12} \vec{e}_2 + \alpha_{13} \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' &= \alpha_{21} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2 + \alpha_{23} \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' &= \alpha_{31} \vec{e}_1 + \alpha_{32} \vec{e}_2 + \alpha_{33} \vec{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2 + z_0 \vec{e}_3\end{aligned}\tag{1}$$

ayrılışlarını yazmaq olar.

Şəkildən görünür ki,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

bərabərliyi ödəyir. Əgər $\overrightarrow{OM}$ vektorunun R reperinə, $\overrightarrow{O'M}$ vektorunun R' reperinə nəzərən ayrılışlarını yazsaq

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 \\ \overrightarrow{O'M} &= x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2' + z' \vec{e}_3'\end{aligned}$$

clar. Onda (2) bərabərliyindən

$$x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3} = x_0\overline{e_1} + y_0\overline{e_2} + z_0\overline{e_3} + x'\overline{e_1} + y'\overline{e_2} + z'\overline{e_3}$$

bərabərliyi alınır. Əgər $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ bazis vektorlarının $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ bazis

vektorlarına nəzərən (1) ayrılışlarını sonuncu bərabərlikdə nəzərə alsaq və

$\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ vektorlarına görə qruplaşdırsaq:

$$\begin{aligned} x\overline{e_1} + y\overline{e_2} + z\overline{e_3} &= (x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z')\overline{e_1} + \\ &+ (y_0 + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z')\overline{e_2} + (z_0 + \alpha_{13}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{33}z')\overline{e_3} \end{aligned}$$

alırıq. Buradan isə iki vektorun bərabərlik şərtinə görə

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' \\ y &= y_0 + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' \\ z &= z_0 + \alpha_{13}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{33}z' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

bərabərlikləri alınır. Burada $\alpha_{ij} (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3})$ bazis vektorların yönəldici

kosinuslarıdır. (2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki dəyişənlərin əmsallarından

clüzəldilmiş

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

matrisə R reperindən R' reperinə keçid matrisi deyilir. Əgər R və R' reperlərinin koordinat başlanğıcları üst-üstə düşərsə, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ olar. Onda (2) düsturlarından koordinat sisteminin koordinat başlanğıcı ətrafında dönmə zamanı əvvəlki və sonrakı koordinatlar arasında əlaqə düsturları alınır, yəni

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' \\ z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Əgər R və R' reperləri yalnız başlanğıc nöqtələri ilə fərqlənirsə (2) düsturlarından

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \\ z &= z_0 + z' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

düsturları alınır. Bu isə koordinat sisteminin paralel köçürülməsidir. Əgər

düzbucaqlı $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koordinat sistemi $R' = \{O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ düzbucaqlı koordinat

sisteminə çevrilirsə (2), (3) və (4) düsturları sadələşər. Əgər $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ vahid

vektorların $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ vahid vektorları ilə əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ və $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ işarə etsək, onların koordinatları

$$\vec{i}' = \{\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3\}$$

$$\vec{j}' = \{\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \beta_3\}$$

$$\vec{k}' = \{\cos \gamma_1, \cos \gamma_2, \cos \gamma_3\}$$

olar. Bu qiymətləri (1) bərabərliyində yazsaq:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y &= y_0 + x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z &= z_0 + x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\}$$

olar. Burada çevirmə matrisi yönəldici kosinuslardan ibarətdir, yəni

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

şəklindədir və bu matrisin elementləri üçün

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1 \\ \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 &= 1 \\ \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

bərabərlikləri ödənilir. Bazis vektorlar üçün

$$\left(\vec{i}' \cdot \vec{j}' \right) = \left(\vec{i}' \cdot \vec{k}' \right) = \left(\vec{j}' \cdot \vec{k}' \right) = 0$$

şərti ödəndiyinə görə yönəldici kosinuslar üçün

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i &= 0 \\
 \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \gamma_i &= 0 \\
 \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

münasibətləri doğrudur. Vektorun toplananlarına ayrılışından və iki vektorun skalyar hasilindən istifadə edərək (5) və (6) bərabərliklərinin doğruluğunu isbat etmək olar.

VIII FƏSİL

MÜSTƏVİ VƏ ONUN MÜXTƏLİF TƏNLİKLƏRİ.

§1. MÜSTƏVİNİN VERİLMƏ ÜSULLARI.

İxtiyari $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ afin reperində müstəvi ilə əlaqədar iki məsələyə rast gəlmək olar.

a) R - reperində verilmiş π müstəvisini təyin edən tənliyin tapılması məsələsi

b) R - afin reperində birdərəcəli üçdəyişənli tənlik verilmişdir, bu tənliyin müstəvi təyin etdiyini göstərməli.

Qeyd olunan məsələlər verilənlərə əsasən müxtəlif üsullarla həll edilir. Başqa sözlə, müstəvi müxtəlif üsullarla verilə bilər. Bunun üçün aşağıdakıları qeyd edək:

Tutaq ki, kolleniar olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. Verilmiş π müstəvisinə paralel olan yaxud onun üzərində yerləşən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına π müstəvisinin yönəldici vektorları deyilir.

İndi müstəvinin verilmə üsullarına baxaq:

1. Bir nöqtəsinə və ikiölçülü alt fəzaya görə müstəvinin birqiymətli təyin etmək

olur, yəni, verilmiş M_0 nöqtəsi π müstəvisi üzərində yerləşirsə, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları

müstəvinin yönəldici vektorlarıdırsa, müstəvinin tənliyini təyin etmək olar.

Tutaq ki, düzbucaqlı $R = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ reperində $M_0\{x_0, y_0, z_0\}$ nöqtəsi,

$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ və $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ vektorları verilmişdir və $M_0 \in \pi$ və $\vec{a}, \vec{b} \in \pi$.

Müstəvi üzərində ixtiyari $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürək. Onda M_0 nöqtəsinin müstəvi üzərində olması üçün

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (1)$$

bərabərliyi ödənməlidir. Burada λ və μ sıfırdan fərqli sabit ədədlərdir və

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

olduğundan, (1) bərabərliyini koordinatlarla yazsaq

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y - y_0 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z - z_0 &= \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}$$

yaxud

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned} \quad (2)$$

tənliklərini alırıq. Bu tənliklərə müstəvinin parametrik tənlikləri deyilir.

Məlumdur ki, $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının komplanar olması üçün

$$(\overrightarrow{M_0 M} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \quad (3)$$

bərabərliyi ödənməlidir, yəni, onların qarışıq hasilı sıfır bərabər olmalıdır. (3)

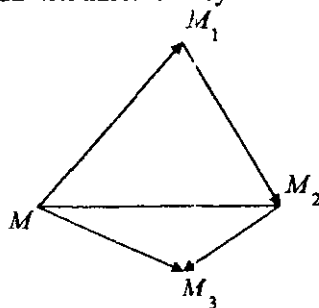
bərabərliyi koordinatlar vasitəsilə

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

şəklində göstərilir. Əgər sonuncu üçtərtibli determinantı açsaq və x , y və z dəyişənlərinə görə qruplaşdırsaq müstəvinin tənliyini alırıq.

2. Əgər bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtə verilmişdirsə, bu nöqtələrdən keçən müstəvini birqiymətli təyin etmək olar

Tutaq ki, $M_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $M_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ və $M_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$ nöqtələri verilmişdir və nöqtələr bir düz xətt üzərində deyil.



Onda bu nöqtələrdən keçən müstəvinin tənliyini tapmaq üçün ixtiyari $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürək. M nöqtəsinin π müstəvisi üzərində olması üçün $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ və $\overline{M_1M_3}$ vektorları komplanar olmalıdır, yəni

$$(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}) \cdot \overline{M_1M_3} = 0$$

şərti ödənməlidir. Bu bərabərliyi koordinatlarla yazsaq

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

tənliyini alırıq. Əgər bu üçtərtibli determinantı açsaq və (x, y, z) dəyişənlərinə görə qruplaşdırsaq π müstəvisinin tənliyini tapmış olarıq. (4)- tənliyinə bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən keçən müstəvinin tənliyi deyilir.

§2. MÜSTƏVINİN ÜMUMİ TƏNLIYI.

Əvvəlki mövzularda göstərilmişdir ki, $Oxyz$ koordinat sistemində π müstəvisi birdərəcəli üçdəyişənli tənliklə təyin olunur və yaxud əksinə üçməchullu birdərəcəli tənlik fəzada düzbucaqlı koordinat sistemində hər hansı π müstəvisini təyin edir. Deməli, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem: Düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sistemində π müstəvisi üçməchullu birdərəcəli tənlik vasitəsilə təyin edilir.

İsbati: Əgər ixtiyari M nöqtəsi π müstəvisi üzərindədirsə, onda nöqtənin koordinatları müstəvinin tənliyini ödəməlidir. M nöqtəsi π müstəvisi üzərində deyilsə, onun koordinatları müstəvinin tənliyini ödəmir.

Xüsusi halda, Ox və Oy oxları π müstəvisi üzərində olarsa, $z=0$ tənliyi müstəvinin tənliyi olar. Ox və Oz oxları π müstəvisi üzərində olarsa, $y=0$ tənliyi, Oy və Oz oxları π müstəvisi üzərində olarsa, $x=0$ tənliyi müstəvi tənliyi olar.

İndi düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sistemində

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

tənliyinə baxaq. Bu tənliyin heç olmasa bir həlli varsa, yəni heç olmasa bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi var və onun koordinatları (1) tənliyini ödəyir. Onda

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (2)$$

olar. Əgər (1) tənliyindən (2) tənliyini çıxsaq

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

alarıq. Buradan görünür ki, $M(x, y, z)$ nöqtəsi π müstəvisi üzərindədir, çünki bu nöqtənin koordinatları (3) tənliyini ödəyir. Onda (3) bərabərliyinin sol tərəfi $\vec{n} = \{A, B, C\}$ və $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ vektorlarının skalyar hasili olar. Ona görə də $M(x, y, z)$ nöqtəsi π müstəvisi üzərində yerləşmədikdə, onun koordinatları (3) tənliyini ödəməz və $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektoru ilə $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru ortoqonal olmaz. Deməli, $M(x, y, z)$ nöqtəsi π müstəvisi üzərindədir və (1) tənliyi $Oxyz$ koordinat sisteminə müstəvi təyin edir.

(1) tənliyi A, B və C əmsallarının hamısı eyni zamanda sıfır bərabər olmadıqda müstəvinin ümumi tənliyi adlanır. $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektoru (1) müstəvisinin normal vektoru adlanır. Əgər π müstəvisi həm (1) tənliyi ilə, həm də

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (4)$$

tənliyi ilə təyin olunursa, onda bu tənliklərin əmsalları

$$A_1 = At, B_1 = Bt, C_1 = Ct, D_1 = Dt$$

şərtlərini ödəməlidir. Bu qiymətləri (4) tənliyində nəzərə alsaq $t \neq 0$ olduğundan

(1) tənliyi alınar.

§3. MÜSTƏVİNİN ÜMUMİ TƏNLIYININ ARAŞDIRILMASI.

Əgər π müstəvisi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdirsə və A, B, C, D əmsallarının hamısı sıfırdan fərqlidirsə, (1) tənliyinə müstəvinin tam tənliyi deyilir. Tənliyin əmsallarından heç olmasa biri sıfıra bərabər olarsa, ona müstəvinin natamam tənliyi deyilir və aşağıdakı hallar mümkündür.

1. $D=0$ olarsa, (1) tənliyindən

$$Ax + By + Cz = 0 \quad (1)$$

tənliyi alınır. $O(0,0,0)$ nöqtəsinin koordinatları bu tənliyi ödəyir. Deməli, bu tənlik koordinat başlanğıcından keçən müstəvini təyin edir.

2. Əgər $A=0$ olarsa, (1) tənliyindən

$$By + Cz + D = 0$$

alırıq. Bu tənlik Ox oxuna paralel müstəvini təyin edir.

3. $B=0$ olduqda

$$Ax + Cz + D = 0$$

tənliyi alınır. Bu tənlik Oy oxuna paralel müstəvinin tənliyidir.

4. $C=0$ ümumi tənlikdən

$$Ax + By + D = 0$$

tənliyi alınır. Bu tənlik Oz oxuna paralel müstəvinin tənliyidir.

5. Əgər (1) tənliyində $A=0$ və $B=0$ olarsa,

$$Cz + D = 0$$

tənliyi alınar. Burada $z = -\frac{D}{C}$ olduğundan tənlik OXY müstəvisinə paralel müstəvinin tənliyi olar.

6. Əgər (1) tənliyində $A=0$ və $C=0$ olarsa,

$$By + D = 0$$

tənliyi alınar. Burada $y = -\frac{D}{B}$ olduğuna görə sonuncu tənlik OXZ müstəvisinə paralel müstəvinin tənliyi olar.

7. Ümumi tənlikdə $B=0$ və $C=0$ olduqda

$$Ax + D = 0$$

olduğundan $x = -\frac{D}{A}$ olar. Ona görə də bu halda tənlik YOZ müstəvisinə paralel müstəvisini təyin edir.

8. Əgər $A=0$, $B=0$ və $D=0$ olarsa, $Cz=0$ olar. $C \neq 0$ olduğundan $z=0$ olmalıdır. Deməli, tənlik OXY müstəvisini təyin edir.

9. Əgər $A=0$, $C=0$ və $D=0$ olarsa, $By=0$ tənliyi XOZ müstəvisini təyin edir.

10. Nəhayət (1) tənliyində $B=0$, $C=0$ və $D=0$ olarsa, tənlik $Ax=0$ şəklində olar və YOZ müstəvisini təyin edir.

§4. MÜSTƏVİNİN PARÇALARLA TƏNLIYI.

Əgər müstəvinin

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

ümumi tənliyində əmsalların hamısı sıfırdan fərqlidirsə, onda tənliyi aşağıdakı şəkildə çevirmək olar.

$$Ax + By + Cz = -D$$

Hər tərəfi $(-D)$ -yə bölsək

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

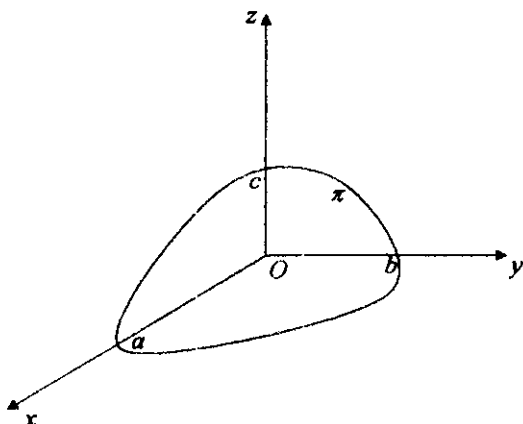
yaxud

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

alırıq. Bu bərabərlikdə $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$ və $c = -\frac{D}{C}$ işarə etsək

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyə müstəvinin parçalarla tənliyi deyilir.



Əgər (2) tənliyində $y=0, z=0$ olsa, $x=a$; $x=0, z=0$ olsa, $y=b$; $x=0, y=0$ olsa, $z=c$ olar. Deməli, a, b və c ədədləri (2) müstəvisinin koordinat oxlarından kəsdiyi parçalara uyğundur.

§5. İKİ MÜSTƏVİ ARASINDA QALAN BUCAQ.

Tutaq ki, π_1 müstəvisi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

tənliyi ilə, π_2 müstəvisi isə

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu müstəvilər arasında qalan bucağı təyin edək.

Müstəvilərin normal vektorları uyğun olaraq $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ və $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ olar.

Onda normal vektorlar arasında qalan bucaq, müstəvilər arasında qalan bucağa bərabər olduğundan, iki vektorun skalyar hasilindən istifadə etsək:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (3)$$

yaza bilərik. Bu bərabərlik vasitəsilə $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ normal vektorlar arasında qalan

bucağı hesablamaq olar. Deməli, həmin düsturla verilmiş müstəvilər arasındakı

bucağı da hesablamaq olar. Əgər (3) düsturunu koordinatlarla yazsaq:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (4)$$

düsturunu alırıq. Əgər $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ normal vektorları kolleniar olsa, yəni, $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

olarsa, onda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (5)$$

şerti ödənməlidir. Bu halda π_1 və π_2 müstəviləri paralel olar. Ona görə də (5) bərabərliyi iki müstəvinin paralellik şərti adlanır. Əgər $\cos \varphi = 0$ olsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (6)$$

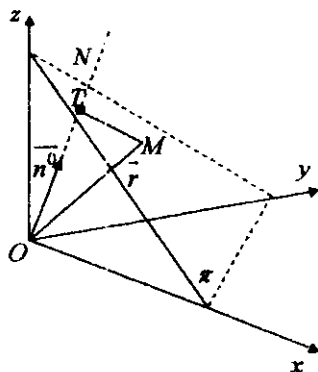
bərabərliyi ödənər. Bu halda π_1 və π_2 müstəviləri qarşılıqlı perpendikulyar olduğundan (6) bərabərliyinə iki müstəvinin perpendikulyarlıq şərti deyilir.

§6. MÜSTƏVİNİN NORMAL TƏNLIYI.

Məlumdur ki, müxtəlif şərtlər verildikdə müstəvinin müxtəlif tənliklərini təyin etmək mümkündür, yəni müstəvini düzbucaqlı koordinat sistemində müxtəlif üsullarla təyin etmək olar. Belə üsullardan biri də aşağıda verilir.

Düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sistemində koordinat başlanğıcından müstəviyə qədər olan məsafə və koordinat başlanğıcından keçib, müstəviyə tərəf yönəlmiş perpendikulyar vahid vektor verildikdə müstəvini birqiymətli təyin etmək olar.

Tutaq ki, $R = \{\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı koordinat sistemində π müstəvisi verilmişdir. Bu müstəvinin tənliyini təyin edək.



O nöqtəsindən müstəviyə perpendikulyar endirək və müstəvi ilə kəsişmə nöqtəsi T olsun. Perpendikulyar üzrə normal vektoru $\vec{n}^0$ ilə işarə edək. Koordinat başlanğıcından π müstəvisinə qədər məsafə p , yəni, $\overline{OT} = p$ və $\vec{n}^0$ vahid vektorun yönəldici kosinusları $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ olsun. Onda verilmiş π müstəvisini p, α, β və γ dəyişənlərinin kəməyi ilə təyin edə bilərik. Bunun üçün ixtiyari $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürək və onun radius vektorunu $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ ilə işarə edək. Onda $M(x, y, z)$ nöqtəsinin π müstəvisi üzərində olması üçün

$$pr_{\vec{n}^0} \vec{OM} = p \quad (1)$$

şərti ödənməlidir. Buradan proyeksiyanın xassəsinə görə, yəni, $pr_{\vec{n}^0} \vec{OM} = \vec{r} \vec{n}^0$

olduğuna görə

$$\vec{r} \vec{n}^0 - p = 0 \quad (2)$$

bərabərliyini alırıq. (2) tənliyinə müstəvinin vektorial tənliyi deyilir və $M(x, y, z)$ nöqtəsinin müstəvi üzərində yerləşmə şərtini ifadə edir. Qeyd edək ki, vahid $\vec{n}^0$ vektorunun Ox, Oy və Oz koordinat oxları üzərindəki proyeksiyaları, bu vektorun oxlarla təşkil etdiyi α, β və γ bucaqlarının kosinuslarıdır. M nöqtəsinin $\vec{r}$ radius vektorunun proyeksiyaları isə həmin nöqtənin x, y və z koordinatlarından ibarətdir, yəni

$$\vec{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}; \quad \vec{r} = \{x, y, z\}$$

olur. Onda (2) tənliyini koordinatlarla yazsaq

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik müstəvinin koordinatlarla yazılmış normal tənliyidir.

Əgər $p=0$ olarsa, yəni, müstəvi koordinat başlanğıcından keçirsə, (2) və (3)

tənlikləri yenə də öz gücündə qalır. Bu halda $\vec{n}^0$ vahid vektoru əvəzinə biri digərindən istiqaməti ilə fərqlənən və müstəviyə perpendikulyar iki vahid vektordan ixtiyari birini qəbul etmək olar.

§7. MÜSTƏVİNİN ÜMUMİ TƏNLIYININ NORMAL ŞƏKLƏ GƏTİRİLMƏSİ.

Ümumi şəkildə olan birdərəcəli

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

tənliyinə baxaq və tutaq ki, A, B, C və D əmsallarının hamısı sıfırdan fərqlidir.

Əgər A, B və C əmsallarına Ox, Oy və Oz koordinat oxları üzrə $\vec{n}$ vektorunun

proyeksiyaları kimi x, y və z -ə isə ixtiyari M nöqtəsinin $\vec{r}$ radius-vektorunun

koordinatları kimi baxsaq (1) tənliyini

$$\vec{r}\vec{n} + D = 0 \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar. Aşağıdakı halları nəzərdən keçirək.

1) $D < 0$ olsun. Onda (2) tənliyini $\vec{n}$ vektorunun moduluna, yəni n -ə bölsək

$$\vec{r}\vec{n}^0 + \frac{D}{n} = 0$$

alırıq, çünki $\frac{\vec{n}}{n} = \vec{n}^0$ olar. Mənfi $\frac{D}{n}$ ədədini p ilə işarə edək

$$\vec{r}\vec{n}^0 - p = 0$$

normal tənliyini alırıq.

2) $D > 0$ olarsa, (2) tənliyini $(-n)$ -ə bölrük və bununla da 0,

$$\vec{r}(-\vec{n}^0) - \frac{p}{n} = 0$$

şəklində olar. Müsbət $\frac{D}{n}$ ədədini p ilə işarə etsək, normal tənliyini alırıq.

3) $D=0$ olarsa, (2) tənliyini n -ə və $(-n)$ -ə bölə bilərik. Birinci halda biz

$\vec{r}\vec{n}^0=0$, ikinci halda isə $\vec{r}(-\vec{n}^0)=0$ tənliyini alırıq. Bunlardan hər biri normal

tənlikdir. Beləliklə, (2) tənliyi həmişə normal tənliyə gətirilə bilər. Lakin normal

tənlik müstəvinini təyin edir. Odur ki, (2) tənliyi və (1) tənliyi də müstəvinini təyin

edir. Beləliklə, teorem isbat olundu. (1) tənliyi də müstəvinin ümumi tənliyi

adlanır.

Müstəviyə perpendikulyar olan, sıfır vektordan fərqli hər hansı vektoru

müstəvinin normal vektoru adlandıraraq. Aydındır ki, onda $\vec{n}\{A,B,C\}$ vektoru

müstəvinin normal vektorlarından biridir. Beləliklə, (1) tənliyindəki cari

koordinatlar qarşısında duran A,B,C əmsallarının sadə həndəsi mənası var: onlar

normal vektorun koordinat oxları üzərindəki proyeksiyalarıdır. Sərbəst D

həddinin həndəsi mənası yoxdur, lakin onun mütləq qiymətinin normal $\vec{n}$

vektorunun n uzunluğuna olan nisbəti, müstəvinin koordinat başlanğıcından olan

məsafəsinə bərabərdir. Göstərmək olar ki, müstəvinin koordinat formasında olan

normal tənliyi (1) ümumi tənliyin xüsusi bir halıdır. Bu halda müstəvinin normal

vektoru işini koordinat başlanğıcından keçən, başlanğıcdan müstəviyə doğru yönələn və verilən müstəviyə perpendikulyar olan vahid vektor görür.

Müstəvinin ümumi tənliyini normal şəkllə gətirmək üçün tənliyi, sərbəst D həddinin mənfi və ya müsbət olmasından asılı olaraq $\vec{n}\{A,C,D\}$ vektorunun müsbət və ya mənfi işarə ilə götürülmüş uzunluğuna bölmək lazımdır. Başqa sözlə, birdərəcəli ümumi (1) tənliyini normal şəkllə gətirmək üçün, onu

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (3)$$

vuruğuna vurmaq lazımdır, həm də vuruğun işarəsinin (1) tənliyindəki sərbəst D həddi işarəsinin əksinə götürmək lazımdır ($D=0$ olduqda işarənin seçilməsi ixtiyaridir). Bu μ vuruğu normalılayıcı vuruq adını daşıyır.

μ vuruğuna vurduqdan sonra (1) tənliyi

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

şəklində olar. Buna görə də

$$\mu A = \cos \alpha, \mu B = \cos \beta, \mu C = \cos \gamma, \mu D = -p \quad (4)$$

alırıq. μ -in (3) düsturundan qiymətini sonuncu bərabərlikdə yerinə yazdıqda $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ və üçün aşağıdakı düsturları alırıq.

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta &= \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma &= \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ p &= \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

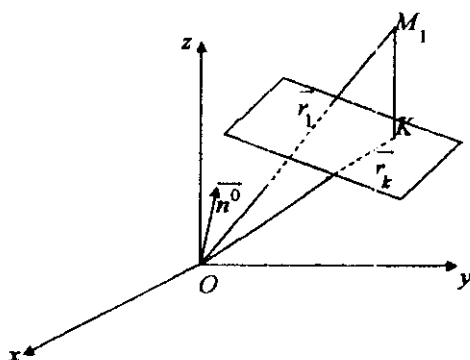
(5) düsturlarından $D < 0$ ($\mu > 0$) olduqda müsbət işarələri, əks halda isə mənfi işarələri götürmək lazımdır.

§8. NÖQTƏDƏN MÜSTƏVİYƏ QƏDƏR MƏSAFƏ.

Verilən nöqtədən verilən müstəviyə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabər olan və nöqtə ilə koordinat başlanğıcı müstəvinin müxtəlif tərəflərində yerləşdikdə müsbət işarə ilə, eyni tərəfində yerləşdikdə isə mənfi işarə ilə götürülən d ədədini, verilən nöqtənin verilən müstəvidən olan meyli adlandırmağı şərtləsək; müstəvi üzərində yerləşən nöqtələr üçün meyl sıfıra bərabərdir. Aydındır ki, nöqtədən müstəviyə qədər məsafə, meylin mütləq qiymətinə bərabərdir.

Tutaq ki, verilmiş $M_1(\Gamma_1)$ nöqtəsindən, vektorial formada $\vec{r}n^0 - p = 0$ normal tənliyi ilə verilmiş müstəviyə qədər məsafənin tapılması tələb olunur.

Məsələ, M_1 nöqtəsindən müstəviyə endirilmiş M_1K perpendikulyarının uzunluğunu tapmaqdan ibarətdir.



$\overrightarrow{KM_1}$ vektorunun $\overrightarrow{n^0}$ vahid vektoruna paralel olduğunu qeyd edərək, onu

$$\overrightarrow{KM_1} = d\overrightarrow{n^0}$$

şəklində verə bilərik. Aydındır ki, mütləq qiymətə götürülmüş ədədin vuruğu bizə axtarılan məsafəni verir; $\overrightarrow{KM_1}$ və $\overrightarrow{n^0}$ vektorlarının istiqamətləri eyni olduqda (yəni şəkildə olduğu kimi M_1 və O nöqtələri müstəvinin müxtəlif tərəflərində yerləşdikdə) d -nin işarəsi müsbət, bu vektorlar əks istiqamətli olduqda (M_1 və O nöqtələri müstəvinin eyni tərəflərində yerləşdikdə) isə mənfi olur. Beləliklə, d ədədi M_1 nöqtəsinin müstəvidən olan meylidir. Şəkildən

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1K}$$

və ya

$$\overrightarrow{\Gamma_k} = \overrightarrow{\Gamma_1} - d\overrightarrow{n^0}$$

olduğunu görürük. O biri tərəfdən K nöqtəsi

$$\overrightarrow{rn^0} - p = 0$$

müstəvisi üzərində yerləşdiyi üçün, bu nöqtənin Γ_k radius vektoru, müstəvinin tənliyini ödəməlidir, yəni,

$$\left(\overline{\Gamma_1 - d n^0}\right) n^0 - p = 0 \text{ və ya } \overline{\Gamma_1 n^0} - d - p = 0.$$

Buradan

$$d = \overline{\Gamma_1 n^0} - p \quad (1)$$

olur. d üçün alınmış ifadəni nəzərdən keçirərək, onun müstəvinin normal tənliyinin sol tərəfində Γ -in yerinə Γ_1 yazılması nəticəsi olduğunu görürük. $\overline{\Gamma_1 n^0}$ skalyar hasilini vuruqların proyeksiyaları ilə ifadə edərək, koordinatlarla

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p| \quad (2)$$

alırıq, yəni, nöqtənin müstəvidən olan meylini tapmaq üçün müstəvinin normal tənliyinin sol tərəfində cari koordinatların yerinə verilən nöqtənin koordinatlarını yazmaq lazımdır. Nöqtədən müstəviyə qədər məsafəni hesablamaq üçün alınan meylin mütləq qiymətini götürmək lazımdır.

§9. MÜSTƏVİLƏR DƏSTƏSİ VƏ BAĞLISI.

Verilmiş $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koordinat sistemində hər hansı bir l düz xəttindən keçən müstəvilər çoxluğu müstəvilər dəstəsi adlanır. l düz xətti isə dəstənin mərkəz xətti adlanır. Aydındır ki, l düz xətti müstəvilərin kəşimə xəttidir. Əgər

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

və

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$

paralel olmayan iki müstəvinin tənlikləridirsə və onlar l düz xətti üzrə kəşirsə, onda hər ikisi eyni zamanda sıfıra bərabər olmayan α və β ədədləri tapmaq olar ki,

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3)$$

tənliyi ilə l düz xəttindən keçən ixtiyari müstəvinin tənliyini təyin etmək olar. Əksinə, l düz xəttindən keçən hər bir müstəvinin tənliyi α və β ədədlərinin uyğun qiymətlərində (3) tənliyindən alınır.

Deməli, müstəvilər dəstəsinin l oxu verildikdə bu dəstəni birqiymətli təyin etmək olar və fəzanın ixtiyari nöqtəsindən bu dəstənin bir müstəvisi keçir. Xüsusi halda, eyni bir müstəviyə paralel olan müstəvilər çoxluğu paralel müstəvilər dəstəsi adlanır. Əgər bu dəstənin ixtiyari müstəvisi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tənliyi ilə təyin olunmuşdursa, onda dəstənin ixtiyari müstəvisi

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

tənliyi ilə təyin olunur. Deməli, paralel müstəvilər dəstəsinin tənlikləri yalnız sərbəst hədd ilə fərqlənirlər. Şərtə görə, α və β ədədlərinin hər ikisi eyni zamanda sıfıra bərabər deyil. Tutaq ki, $\alpha \neq 0$ onda (3) tənliyini

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (4)$$

şəklində yazmaq olar. Burada $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ işarə edilmişdir. (3) tənliyi iki α və β parametrlərindən, (4) tənliyi isə yalnız λ parametrindən asılıdır. Ona görə də (3) tənliyinə nisbətən (4) tənliyi praktiki məsələlərin həlli üçün daha əlverişlidir. Qeyd edək ki, (4) tənliyində λ ədədinə müxtəlif qiymətlər verməklə müstəvilər dəstəsinin ixtiyari müstəvisinin tənliyini təyin etmək mümkündür. Yalnız (2) tənliyi ilə təyin olunan müstəvini təyin etmək mümkün deyil. Çünki λ ədədinin heç bir qiymətində (4) tənliyindən (2) tənliyi alınmır.

Fəzanın eyni bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən müstəvilər çoxluğuna müstəvilər bağılı deyilir. M_0 nöqtəsi isə bağılının mərkəzi adlanır. Müstəvinin

ümumi tənliyinə əsasən $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ koordiant sistemində verilmiş

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyini

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənlikdə A, B və C əmsalları müxtəlif qiymətlər ala bilər. Ona görə də bu əmsallara müxtəlif qiymətlər verməklə, M_0 nöqtəsindən keçən müstəvilərin tənliyini təyin etmək olar. Deməli, müstəvilər bağılsının mərkəzi verildikdə, bu bağılıyı birqiymətli təyin etmək olar. Bağlının mərkəzini təyin etmək üçün mərkəzdən keçən üç əsas müstəvinin

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (5)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (6)$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \quad (7)$$

tənliklərini, cəbri tənliklər şəklində həll etmək kifayətdir. Əgər $k \neq 0$ və $l \neq 0$ olarsa, ona müstəvilər bağılsının ixtiyari müstəvisini

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + l(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$$

tənliyi ilə təyin etmək mümkündür. Aydındır ki, son bərabərlikdə k və l ədədlərinə müxtəlif qiymətlər verməklə bağlının ixtiyari müstəvisini təyin etmək mümkündür, yalnız burada k və l ədədlərinin hər ikisinin eyni zamanda sıfıra

bərabər olmaması şərti ödənməlidir. Deməli, bağlının mərkəzi onun vəziyyətini fəzada birqiymətli təyin edir.

IX FƏSİL

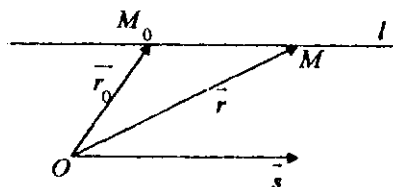
FƏZADA DÜZ XƏTT

§1. FƏZADA DÜZ XƏTTİN VERİLMƏ ÜSULLARI.

Düz xətt fəzada müxtəlif üsullarla verilə bilər. Verilənlərdən istifadə edərək düz xəttin müxtəlif tənlikləri təyin edilir. Ona görə də üsulların bəzilərini qeyd edək:

1. Yönləldici vektoruna və verilmiş nöqtəsinə görə düz xəttin təyin edilməsi.

Tutaq ki, düz xətt üzərində $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi və düz xəttə paralel sıfıra bərabər olmayan $\vec{s}$ vektoru verilmişdir. $\vec{s}$ vektoru düz xəttin yönləldici vektoru adlanır. Düz xətt üzərində cari $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürək.



M_0 nöqtəsinin radius vektorunu $\vec{r}_0$, M nöqtəsinin radius vektorunu isə $\vec{r}$ ilə

işarə edək. Onda

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \quad (1)$$

bərabərliyini yazı bilərik. Verilmiş $\vec{s}$ vektorunun $\overrightarrow{M_0M}$ vektoruna kolleniar olduğunu nəzərə alsaq

$$\overrightarrow{M_0 M} = \vec{s} t$$

yazmaq olar. Başqa sözlə, M nöqtəsinin l düz xətti üzərində yerləşməsi üçün

$\overrightarrow{M_0 M}$ vektoru ilə $\vec{s}$ vektoru kolleniar olmalıdır. Son bərabərliyi (1) tənliyində

yazsaq və $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} t \quad (2)$$

bərabərliyini alırıq. Burada t ədədi M nöqtəsinin l düz xətti üzərindəki

vəziyyətindən asılı olaraq müxtəlif qiymətlər ala bilər və parametr adlanır. (2)

tənliyi düz xəttin vektorial tənliyidir. M_0 nöqtəsinin koordianatları (x_0, y_0, z_0) , M

nöqtəsinin koordianatları (x, y, z) olduğundan $\vec{r}_0$ və $\vec{r}$ bu nöqtələrin uyğun olaraq

radius vektorları olduğundan $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ və $\vec{r} = (x, y, z)$ olar. Onda (2) tənliyini

koordinatlarla

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt \quad (3)$$

şəklində yazmaq olar. Burada m, n və p ədədləri $\vec{s}$ vektorunun koordianatlarıdır,

yəni $\vec{s} = \{m, n, p\}$ götürülmüşdür. (3) tənliklərinə düz xəttin parametrik tənlikləri

deyilir. (m, n, p) üçlüyü düz xəttə paralel olan $\vec{s}$ vektorunun koordinat oxları

üzərində proyeksiyaları olduğu üçün düz xəttin fəzada istiqamətini xarakterizə

edirlər və bu düz xəttin yönəldici əmsalları adlanırlar. Əgər $\vec{s} = \vec{s}^0$ vahid vektor olarsa, m, n və p əmsalları koordinat oxlarının müsbət istiqaməti ilə t düz xəttinin əmələ gətirdiyi α, β və γ bucaqlarının kosinuslarına bərabər olur. Onda (2) və (3) tənlikləri uyğun olaraq

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}^0 t \quad (4)$$

$$x = x_0 + \cos \alpha t; \quad y = y_0 + \cos \beta t; \quad z = z_0 + \cos \gamma t \quad (5)$$

olar. Bu bərabərlikdə t parametri həm müsbət, həm də mənfi işarəli qiymətlər ala bilər. Belə ki, $t > 0$ olduqda $\vec{OM}$ və $\vec{s}^0$ vektorları eyni istiqamətli, $t < 0$ olduqda isə əks istiqamətli olurlar. Qeyd edək ki, $\vec{s}^0$ vahid vektor olduqda $\vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{s}^0$ yazmaq olar. Burada $|\vec{s}|$ ədədi $\vec{s}$ vektorunun uzunluğudur və

$$|\vec{s}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur. Sonuncu bərabərliyi koordinatlarla yazsaq:

$$m = s \cos \alpha; \quad n = s \cos \beta; \quad p = s \cos \gamma$$

yaxud

$$\cos \alpha = \frac{m}{s}; \quad \cos \beta = \frac{n}{s}; \quad \cos \gamma = \frac{p}{s}$$

alırıq. Sonuncu bərabərlikdə vektorun uzunluğunun qiymətini nəzərə alsaq:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (6)$$

olar. Deməli, l düz xəttinin fəzada vəziyyəti onun yönəldici əmsallarının köməyi ilə birqiymətli təyin olunur. Əgər (6) bərabərliklərini kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplansaq

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

bərabərliyini alırıq. Deməli, yönəldici kosinusların kvadratları cəmi vahidə bərabərdir. Bəzən düz xəttin parametrik tənlikləri əvəzinə onu cari koordinatlar vasitəsi ilə ifadə olunan birdərcəli iki tənlik sistemi ilə təsvir edirlər. Bu tənliklər (3) tənliklərindən t parametrimini yox etmək yolu ilə alınır. Belə ki, (3) tənliyindən

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \quad \frac{y - y_0}{n} = t, \quad \frac{z - z_0}{p} = t$$

və ya

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (7)$$

tənliyi alınır. (7) tənliyinə fəzada düz xəttin kanonik tənliyi deyilir. Qeyd edək ki, (7) tənliyində məxrəclərin hamısı eyni zamanda sıfıra bərabər ola bilməz. Çünki şərtə görə $s \neq 0$ qəbul edilmişdir. Lakin m, n və p ədədlərindən bəziləri sıfıra bərabər ola bilər.

2. İki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyini verilmiş iki müxtəlif nöqtəsinə görə təyin etmək olar. Doğrudan da, tutaq ki, düz xəttin iki müxtəlif $M_1(x_1, y_1, z_1)$ və $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtələri verilmişdir. Düz xəttin tənliyini təyin etmək üçün ixtiyari $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürək. Əgər M nöqtəsi düz xətt üzərindədirsə

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{M_1M_2} \quad (8)$$

olmalıdır, yəni, M nöqtəsi düz xətt üzərində yerləşirsə, onda $\overline{M_1M}$ və $\overline{M_1M_2}$ vektorları kolleniar olar. Yəni, (8) bərabərliyi ödənər. Digər tərəfdən

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}; \quad \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

(8) bərabərliyini koordinatlarla yazsaq

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$$

yaxud

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda; \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda; \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

tənliklərini alırıq. Bu tənliklərdən isə

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (9)$$

tənliyi alınır. (9) tənliyinə fəzada iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyi deyilir.

Əgər (9) tənliyində

$$x_2 - x_1 = m, \quad y_2 - y_1 = n, \quad z_2 - z_1 = p$$

qəbul etsək

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik (7) bərabərliyi ilə təyin olunmuş düz xəttin kanonik tənliyidir.

3. Düz xətt iki müstəvinin kəsişməsi kimi.

Əgər fəzada π_1 müstəvisi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

π_2 müstəvisi isə

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$

tənlikləri ilə verilmişdirsə və bu müstəvilər paralel deyilsə, onda onların ortaq nöqtələr çoxluğu var. Bu nöqtələr çoxluğu isə düz xətt təşkil edir. Ona görə də (1) və (2) tənliklərinə düz xəttin tənlikləri kimi baxmaq olar və düz xəttin ümumi tənlikləri adlanırlar.

İndi isə (1) və (2) müstəvilərinin düz xətt təyin etmək şərtini araşdıraq.

Tutaq ki, (1) və (2) müstəviləri l düz xəttini təyin edir və $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi l düz xətti üzərindədir. Onda bu nöqtənin koordinatları (1) və (2) tənliklərini ödəməlidir, yəni

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0 \quad (1')$$

$$A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0 \quad (2')$$

bərabərlikləri ödənər. Əgər (1) tənliyindən (1'), (2) tənliyindən (2') tənliyini çıxsaq:

$$\left. \begin{aligned} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) &= 0 \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

tənliklər sistemini alırıq. Tutaq ki, $z - z_0 \neq 0$ onda (3) tənliklər sistemindən

$$\left. \begin{aligned} A_1 \frac{x - x_0}{z - z_0} + B_1 \frac{y - y_0}{z - z_0} + C_1 &= 0 \\ A_2 \frac{x - x_0}{z - z_0} + B_2 \frac{y - y_0}{z - z_0} + C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

sistemini alırıq. Bu tənliklər sisteminin determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

olsa, onda

$$\frac{x-x_0}{z-z_0} = -\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y-y_0}{z-z_0} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

Əgər $\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = t$ əvəz etsək

$$x-x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} t, \quad y-y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} t$$

bərabərliklərini alırıq. Son bərabərliklərdən

$$x-x_0 = mt; \quad y-y_0 = nt; \quad z-z_0 = pt$$

yaxud

$$x = x_0 + mt; \quad y = y_0 + nt; \quad z = z_0 + pt \quad (6)$$

tənliklərini alırıq. Burada

$$m = -\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad n = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad p = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (7)$$

işarə edilmişdir. (6) tənlikləri fəzada düz xəttin parametrik tənlikləridir. Deməli,

(7) bərabərliklərindən heç olmasa biri sıfırdan fərqli olduqda (1) və (2)

müstəviləri fəzada bir xətt təyin edirlər. Verilmiş (1) və (2) müstəvilərinin normal

vektorları uyğun olaraq $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ və $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ olsa, onda düz xəttin yönəldici vektoru bu vektorlara perpendikulyar olmalıdır. Deməli, $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ vektorlarına perpendikulyar olan hər bir vektor π_1 və π_2 müstəvilərinə paralel olmalıdır. Ona görə də $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ vektorlarının $[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2]$ vektorial hasilı qeyd olunan şərti ödədiyinə görə (1) və (2) müstəvilərinin təyin etdiyi düz xəttin yönəldici vektoru olar.

§2. FƏZADA İKİ DÜZ XƏTTİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ.

Fəzada iki düz xətt aşağıdakı vəziyyətdə ola bilər:

1. Fəzada iki düz xətt kəsişir.
2. Fəzada iki düz xətt paralel olar.
3. Fəzada iki düz xətt çarpaz ola bilər.

Qeyd olunanları izah etmək üçün əvvəlcə iki düz xətt arasında qalan bucağı hesablamaq lazımdır. İki düz xətt arasında qalan bucağın hesablanması isə bu düz xətlərin yönəldici vektorları arasında qalan bucağın hesablanmasına gətirilir. Ona görə də fərz edək ki, l_1 düz xətti

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (1)$$

l_2 düz xətti isə

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (2)$$

tənliyi ilə verilmidir. Onda bu düz xətlərin yönəldici vektorları uyğun olaraq

$$\vec{a}_1 = \{m_1, q_1, p_1\} \quad \text{və} \quad \vec{a}_2 = \{m_2, q_2, p_2\}$$

olar. Aydındır ki, l_1 və l_2 düz xətləri arasındakı φ bucağı əvəzinə onların

yönəldici $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorları arasındakı bucağı və ya onu π -yə tamamlayan

bucağı qəbul etmək olar. Onda iki vektorun skalyar hasilindən istifadə etsək

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

yaxud

$$\cos \alpha = \pm \frac{m_1 m_2 + q_1 q_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + q_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + q_2^2 + p_2^2}} \quad (3)$$

alırıq. (3) düsturunda işarə verilən düz xətlər arasında olan iki bucağın hansının

seçilməsindən asılıdır. (3) düsturundan istifadə etsək, iki düz xəttin qarşılıqlı

vəziyyətini təyin etmək olar. Belə ki, $\cos \varphi = 0$ olsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$m_1 m_2 + q_1 q_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (4)$$

bərabərliyi l_1 və l_2 düz xətlərinin perpendikulyarlıq şərti olar. Düz xətlərin

yönəldici $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorları kolleniar olsa, düz xətlər paralel olar. Ona görə

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

bərabərliyi iki düz xəttin paralellik şərtidir. Aydındır ki, hər iki halda düz xətlər

bir müstəvi üzərində yerləşir. Deməli, bu hallarda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ yönəldici və

$\vec{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektorları komplanar vektorlar olar, yəni

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & q_1 & p_1 \\ m_2 & q_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

şərti ödənər. Deməli, (6) şərti ödənərsə, l_1 və l_2 düz xətləri bir müstəvidə yerləşir.

Ona görə də $\Delta \neq 0$ şərti, yəni, (6) şərti ödənmədikdə düz xətlər bir müstəvi

üzərində yerləşmir. Buradan isə iki düz xəttin çarpaz olması şərtini

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & q_1 & p_1 \\ m_2 & q_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

şəklində təyin etmək olar.

§3. DÜZ XƏTLƏ MÜSTƏVİNİN QARŞILIQLI VƏZİYYƏTİ.

Fəzada düz xətlə müstəvi üç vəziyyətdə ola bilər:

1. Düz xətlə müstəvinin bir ortaq nöqtəsi var.
2. Düz xətlə müstəvi paraleldirlər, yəni, onların ortaq nöqtəsi yoxdur.
3. Düz xətlə müstəvinin sonsuz sayda ortaq nöqtələri var.

Bu halları araşdırmaq üçün tutaq ki, $R = \{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ reperində d düz xətti

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

kanonik tənliyi ilə π müstəvisi isə

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ümumi tənliyi ilə verilmişdir.

Aydındır ki, d düz xətti ilə π müstəvisinin ortaq nöqtəsini təyin etmək üçün

(1) və (2) tənliklərini birgə həll etmək lazımdır. Əgər

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t$$

qəbul edib, (1) və (2) tənliklərini həll etsək və qruplaşdırsaq

$$(Al + Bm + Cn)t = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) \quad (3)$$

Yəni, (3) tənliyini araşdıraraq:

1. Əgər

$$Al + Bm + Cn \neq 0 \quad (4)$$

olsa, (3) tənliyinin bir kökü var. Deməli, d düz xətti ilə π müstəvisi bir nöqtədə kəsişir. Ona görə də (4) şərti düz xətlə müstəvinin kəsişmə şərti adlanır.

2. Əgər

$$\left. \begin{aligned} Al + Bm + Cn &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

olsa, (3) tənliyinin heç bir kökü yoxdur. Bu o deməkdir ki, d düz xətti ilə π müstəvisinin ortaq nöqtəsi yoxdur. Bu halda düz xətlə müstəvi paralel olar. Ona görə də (5) düz xətlə müstəvinin paralellik şərtidir.

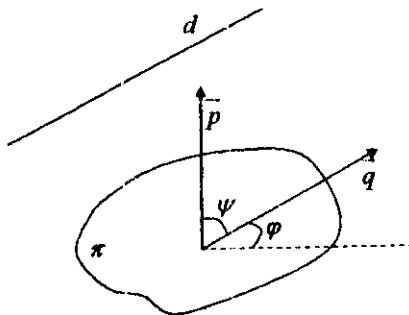
3. Əgər (3) tənliyində

$$\left. \begin{aligned} Al + Bm + Cn &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

olarsa, tənliyin sonsuz sayda həlli var. Bu isə o deməkdir ki, düz xətlə müstəvi üst-üstə düşür.

Əgər düz xətlə müstəvinin bir ortaq nöqtəsi varsa, yəni, onlar kəsişirsə, onda düz xətlə müstəvi arasında qalan bucağı hesablamaq olar.

Verilmiş (1) düz xətti ilə (2) müstəvisi arasında qalan bucaq, düz xətlə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyasının əmələ gətirdiyi iki qonşu bucaqdan istənilən birini düz xətlə müstəvi arasındakı φ bucağı adlandırmaq olar. Bu φ bucağı eyni zamanda düz xətin yönəldici $\vec{q} = \{l, m, n\}$ vektoru ilə müstəvinin $\vec{p} = \{A, B, C\}$ normal vektoru arasındakı bucağın tamamlayıcı bucağıdır, yəni $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ ödənilir.



Onda iki vektorun skalyar hasilinə görə

$$(\vec{p} \cdot \vec{q}) = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \psi$$

yaxud

$$\cos \psi = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

yaza bilərik. Son bərabərliyi koordinatlarla yazsaq və $\cos \psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$

olduğunu nəzərə alsaq:

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (7)$$

bərabərliyini alırıq.

Əgər düz xətlə müstəvi paralel olarsa, onlar arasında qalan bucaq sıfıra bərabər olduğundan $\sin \varphi = 0$ və (7) bərabərliyindən

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad (8)$$

alınır. Bu bərabərlik düz xətlə müstəvinin paralellik şərtidir. Bu halda düz xəttin yönəldici vektoru ilə müstəvinin normal vektoru qarşılıqlı perpendikulyar olar.

Əgər düz xəttin yönəldici vektoru ilə müstəvinin normal vektoru kolleniar olarsa, yəni $p = \lambda q$ olarsa, düz xətt müstəviyə perpendikulyar olar. Kolleniarlıq şərtini koordinatlarla

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \quad (9)$$

şəklində yazmaq olar. (9) bərabərliyi düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlıq şərti adlanır.

X FƏSİL

SƏTH VƏ ONUN TƏNLIYI

§1. SƏTH ANLAYIŞI VƏ ONUN TƏNLIYI.

Müstəvidə xətlər olduğu kimi səthlərdə koordinat sistemləri tənliklər vasitəsilə təyin olunur.

Tutaq ki, $Oxyz$ düzbucaqlı koordinat sistemi və S səthi verilmişdir. Əgər S səthi üzərində olan ixtiyari $M(x, y, z)$ nöqtəsinin koordinatları

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyirsə və səth üzərində yerləşməyən heç bir nöqtənin koordinatları bu tənliyi ödəmirsə, (1) tənliyi S səthinin tənliyi adlanır. Deməli, koordinat sistemində S səthi koordinatları (1) tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğudur, yəni, (1) tənliyi S səthini təyin edir.

Qeyd edək ki, (1) tənliyi həmişə səth təyin etmir. Məsələn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tənliyi səth təyin etmir, yaxud $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ tənliyi $O(0,0,0)$ nöqtəsini təyin edir. Ona görə də (1) tənliyinin səth təyin etməsi üçün $F(x, y, z)$ funksiyası müəyyən şərtlər ödəməlidir (məsələn kəsilməzlik, dəyişənlərə görə birqiymətli təyin edilməsi və s.). Buradan görünür ki, ixtiyari üçdəyişənli tənlik səth təyin etmir. Əgər (1) tənliyi hər hansı bir koordinat sistemində səth təyin edirsə, başqa koordinat sistemində də səth təyin edəcəkdir.

Əgər (1) tənliyi cəbri tənlikdirsə, onun təyin etdiyi səth cəbri səth adlanır, əks halda isə transcendent səth adlanır.

Əgər (1) tənliyinə dəyişənlər n -ci dərəcədən daxildirsə, onun təyin etdiyi səth n tərtibli səth adlanır. Buradan görünür ki, (1) tənliyi $Oxyz$ koordinat sistemində n tərtibli səth təyin edirsə, digər koordinat sistemində də n tərtibli səth təyin edir. Ən sadə səth birtərtibli səth, yəni müstəvidir.

Əgər səthin ixtiyari M_0 nöqtəsindən keçən və Oz oxuna paralel olan düz xətt səth üzərində yerləşərsə, belə səthə silindirik səth deyilir, düz xətt isə onun doğurunu adlanır.

Koordinat başlanğıcından və səthin ixtiyari M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt səth üzərində yerləşərsə, belə səthə konik səth deyilir.

§2. İKİTƏRTİBLİ SƏTHİN ÜMUMİ TƏNLIYI.

Qeyd etmişdik ki, $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ koordinat sistemində səth $F(x, y, z) = 0$ tənliyi ilə təyin oluna bilər. Əgər $F(x, y, z)$ funksiyası ikidərəcəli çoxhədlidirsə, onun təyin etdiyi səthə ikitərtibli səth deyilir. İkitərtibli səthin ümumi tənliyi

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

şəklində təyin olunur.

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

(1) tənliyinin baş hissəsi adlanır.

$$\psi(x, y, z) = 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

isə xətti hissə adlanır. (1) tənliyinin ikitərtibli səth təyin etməsi üçün baş hissənin əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olmalıdır, yəni $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}$ və a_{23} əmsallarından heç olmasa biri sıfıra bərabər olmadıqda (1) tənliyi ikitərtibli səth təyin edir. Burada a_{14}, a_{24}, a_{34} və a_{44} əmsalları xətti hissənin əmsalları adlanır və a_{44} sərbəst həddir.

Qeyd edək ki, (1) tənliyi hər hansı koordinat sistemində ikitərtibli səth təyin edirsə, digər koordinat sistemində də ikitərtibli səth təyin edər, yəni, koordinat sistemi çevrildikdə (1) tənliyi formasını dəyişmir.

Tutaq ki, $Oxyz$ koordinat sistemi koordinat oxlarına paralel olaraq $O'(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsinə köçürülmüşdür. Onda çevirmə düsturları

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'$$

olar. Əgər bu düsturları (1) tənliyində yazsaq və qruplaşdırsaq

$$\begin{aligned} & a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + \\ & + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Burada

$$a'_{14} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}$$

$$a'_{24} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}$$

$$a'_{34} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} \quad (3)$$

$$a'_{44} = a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 +$$

$$+ 2a_{23}y_0z_0 + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + a_{34}z_0 + a_{44}$$

işarə edilmişdir. Alınmış (2) tənliyi (1) tənliyi şəklindədir. Yəni koordinat sisteminin paralel köçürülməsi zamanı ikitərtibli əyrinin (1) ümumi tənliyi analitik formasını dəyişmir. (2) tənliyindən görünür ki, paralel köçürmədə baş hissənin əmsalları dəyişmir, yalnız xətti hissənin əmsalları dəyişir və bu əmsallar (3) bərabərliyi ilə hesablanır, yəni, xətti hissənin əmsalları (1) tənliyində olan xətti hissənin əmsalları və (x_0, y_0, z_0) ədədləri ilə ifadə olunur.

İndi fərz edək ki, $Oxyz$ koordinat sistemi koordinat başlanğıcı ətrafında döndərilmişdir. Onda əvvəlki və yeni koordinatlar arasında əlaqə

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z'$$

$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z'$$

$$z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'$$

düsturları ilə təyin edilir və $c_{i,j} = c_{j,i}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) şərti ödənilir. Əgər bu düsturları (1) tənliyində yazsaq, yüksək hədlərin əmsalları (1) tənliyindəki yüksək hədlərin əmsalları və $c_{i,j}$ -lərlə ifadə olunur, (2) tənliyindəki $a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}$ əmsalları isə a_{14}, a_{24}, a_{34} əmsalları və $c_{i,j}$ -lərlə ifadə edilir, yalnız a_{44} sərbəst hədd dəyişmir. Aydındır ki, (2) tənliyində $a_{14}; a_{24}; a_{34} = 0$ olarsa, $a'_{14}; a'_{24}; a'_{34} = 0$ olar. Burada

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

ədədləri (2) tənliyinin koordinat çevrilmələrinə görə invariantları adlanır.

§3. İKİTƏRTİBLİ SƏTHİN MƏRKƏZİ.

İkitərtibli səthin həndəsi xassələrini öyrənmək üçün elə koordinat sistemi seçmək lazımdır ki, yeni sistemdə səthin ümumi tənliyi sadə şəkllə düşsün. Bu məqsədlə fərz edək ki, yeni seçilmiş $O'x'y'z'$ koordinat sisteminin mərkəzi $O'(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsidir və bu sistemdə (2) tənliyinin xətti hissəsinin əmsalları sıfıra bərabərdir, yəni, $a'_{14} = 0$; $a'_{24} = 0$; $a'_{34} = 0$ şərtləri ödənilir. Onda (3) bərabərliklərindən

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

tənliklər sistemi alınır. Aydındır ki, (x_0, y_0, z_0) bu sistemin həllidir. (4) tənliklər sistemi ikitərtibli S səthinin mərkəzinin tənlikləri, $O'(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi isə səthin mərkəzi adlanır. Səthin mərkəzindən istifadə edərək, onun tənliyini sadələşdirmək olar. Tutaq ki, $O'(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi ikitərtibli S səthinin mərkəzidir. Koordinat başlanğıcını O' nöqtəsinə köçürsək, baş əmsallar dəyişmir və səthin mərkəzi koordinat başlanğıcı olduğundan (2) tənliyində $a'_{14} = 0$; $a'_{24} = 0$; $a'_{34} = 0$ olar. Bu halda (2) tənliyini

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a'_{44} = 0 \quad (5)$$

şəklində yazmaq olar. Buradan görünür ki, $M'(x', y', z')$ nöqtəsinin koordinatları (5) tənliyini ödəyir. Onda bu nöqtə ikitərtibli S səthi üzərində yerləşir. $M^*(-x', -y', -z')$ nöqtəsi O' nöqtəsinə görə simmetrik nöqtədir və (5) tənliyini ödəyir. Deməli, $M^*(-x', -y', -z')$ nöqtəsi də S səthi üzərində yerləşir. Buradan aydın olur ki, ikitərtibli S səthinin nöqtələri O' mərkəzinə nəzərən simmetrik yerləşir. Başqa sözlə, ikitərtibli S səthinin mərkəzi onun simmetriya mərkəzidir. Əgər ikitərtibli səthin mərkəzinin (4) tənliklər sisteminin bir həlli varsa, bu səthə mərkəzi səth deyilir. Əks halda isə mərkəzi səth deyil. Deməli, koordinat sisteminin paralel köçürülməsinin köməyi ilə (2) tənliyini daha sadə (5) şəklinə gətirmək olar.

§4. KOORDİNAT SİSTEMİNİN DÖNMƏSİ VASİTƏSİLƏ SƏTH TƏNLIYININ SADƏLƏŞDİRİLMƏSİ.

İndi isə koordinat sisteminin dönməsi vasitəsilə elə koordinat sistemi təyin edək ki, həmin sistemdə ikitərtibli səthin (2) tənliyində $a'_{12} = 0$; $a'_{13} = 0$; $a'_{23} = 0$ şərtləri ödənsin. Tutaq ki,

$$\phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z'$$

bərabərliyi var və radiusu vahidə bərabər olan π kürəsi götürək. Kürənin mərkəzi koordinat başlanğıcı, yəni, $O(0,0,0)$ nöqtəsi olsun. Bu şərtlər daxilində $F(x,y,z)$ çoxhədlisinin $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şərtini ödəyən qiymətlərinə baxaq:

Bu kürə üzərində elə M nöqtəsi tapaq ki, həmin nöqtədə $F(x,y,z)$ çoxhədlisi maksimum qiymət alsın. Bu məqsədlə Oz' oxunu $O(0,0,0)$ və $M(x',y',z')$ nöqtələrindən keçirək. Ox' və Oy' oxları isə Oz' oxuna perpendikulyar olduğundan

$$\varphi(x',y',z)' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z' \quad (6)$$

olar. Onda kürənin tənliyi yeni koordinat sistemində

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \quad (7)$$

şəklində, M nöqtəsinin koordinatları isə $M(0,0,1)$ kimi təyin olunur. Bu halda (6) ifadəsində $a'_{13} = 0$; $a'_{23} = 0$ olduğunu göstərək. Bunun üçün (7) kürəsi ilə $y' = 0$ müstəvisinin kəsişməsindən alınan C çevrəsi üzərində $\varphi(x,y,z)$ çoxhədlisinin qiymətini hesablayaq.

Tutaq ki, C çevrəsi üzərində yerləşən P nöqtəsinin radius vektoru Oz' oxu ilə θ bucağı əmələ gətirir. Onda həmin nöqtənin koordinatları

$$x' = \sin \theta; \quad y' = 0; \quad z' = \cos \theta$$

olar. Bu qiymətləri (6) bərabərliyində yazsaq

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= a'_{11} \sin^2 \theta + a'_{33} \cos^2 \theta + 2a'_{13} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{a'^2_{11} + a'^2_{33}}{2} + \frac{a'^2_{13} - a'^2_{11}}{2} \cos 2\theta + a'_{13} \sin 2\theta\end{aligned}$$

olar. Burada $\theta=0$ olsa, $F(\theta)$ funksiyası maksimum qiymət alar. Sonuncu bərabərliyi θ dəyişəninə görə diferensiallasaq $2a'_{13}=0$ yaxud $a'_{13}=0$ alırıq.

Əgər kürənin $x'=0$ müstəvisi ilə kəsişməsini götürsək, eyni qayda ilə $a'_{23}=0$ olduğunu isbat etmək olar. Deməli, yeni $O'x'y'z'$ koordinat sisteminə

$$\varphi(x', y', z) = a'_{11} x'^2 + 2a'_{12} x'y' + a'_{22} y'^2 + a'_{33} z'^2$$

olar. Onda ikitərtibli səthin (2) tənliyini

$$a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + a'_{33} z'^2 + 2a'_{14} x' + 2a'_{24} y' + 2a'_{34} z + a'_{44} = 0 \quad (8)$$

şəklində yazmaq olar. İkitərtibli səthin (1) tənliyinin (8) tənliyinə gətirilməsinə standart çevirmə deyilir.

§5. İKİTƏRTİBLİ SƏTHLƏRİN TƏSNİFATI.

Əvvəlki mövzularda göstərilmişdir ki, ikitərtibli səth mərkəzi səth olduqda, koordinat başlanğıcını səthin mərkəzinə köçürsək, səthin ümumi tənliyini sadələşdirməklə

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{44} = 0 \quad (1')$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənliyin əmsallarından istifadə etməklə onun təyin etdiyi səthi təyin etmək olar. İkitərtibli səth mərkəzi səth olduğundan

$a_{11} \neq 0; a_{22} \neq 0; a_{33} \neq 0$ şərtləri ödənilir. Onda aşağıdakı hallar mümkündür:

1. (1') tənliyində a_{11}, a_{22} və a_{33} əmsalları eyni işarəlidir, a_{44} əmsalı isə sıfıra bərabər deyil. Onda a_{44} əmsalının işarəsi digər əmsalların işarəsi ilə eyni olsa, (1') tənliyinin həlli yoxdur. Bu halda (1') tənliyinin təyin etdiyi səth xəyali ellipsoid adlanır. Əgər a_{44} əmsalının işarəsi a_{11}, a_{22} və a_{33} əmsallarının işarəsinin əksidirsə, (1') tənliyinin təyin etdiyi səthə həqiqi ellipsoid deyilir və onun tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

şəklində təyin olunur. Burada $a = \frac{a_{44}}{a_{11}}, b = \frac{a_{44}}{a_{22}}, c = \frac{a_{44}}{a_{33}}$ işarə edilmişdir.

2. Tənliyin a_{11}, a_{22}, a_{33} və a_{44} əmsallarından ikisi bir işarəli, digər ikisi isə əks işarəlidir, yəni, tutaq ki, $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} < 0$ və $a_{44} < 0$ şərtləri ödənilir.

(1') tənliyini

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

şəklinə gətirmək olar. Bu tənlik biroyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyi adlanır

və burada $a = -\frac{a_{44}}{a_{11}}$, $b = -\frac{a_{44}}{a_{22}}$; $c = \frac{a_{44}}{a_{33}}$ işarə edilmişdir.

3. Verilmiş (I') tənliyində əmsallardan birinin işarəsi digərlərinin işarəsinin əksi olarsa, yəni, $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} > 0$ və $a_{44} < 0$ olarsa, (I') tənliyini

$a = \frac{a_{44}}{a_{11}}$, $b = \frac{a_{44}}{a_{22}}$; $c = -\frac{a_{44}}{a_{33}}$ işarə etməklə

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

şəklində yazmaq olar. Alınmış tənlik ikioyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyidir.

4. Əgər (I') tənliyində $a_{44} = 0$ olsa və a_{11} , a_{22} , a_{33} əmsalları eyni işarəli olsa, onu

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0 \quad (2')$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənliyi $O(0,0,0)$ nöqtəsinin koordinatları ödəyir, yəni, $x=0$, $y=0$ və $z=0$ tənliyin həllidir. Deməli, $(2')$ tənliyi ilə təyin olunan ikitərtibli səth koordinat başlanğıcından keçir və səth yalnız bir nöqtədən ibarətdir. Bu səthə xəyali konus deyilir.

Fərz edək ki, a_{11} , a_{22} və a_{33} əmsalları müxtəlif işarəlidir. Onda $(2')$ tənliyini $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ və $a_{33} < 0$ qəbul etməklə

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənlik həqiqi konus təyin edir. İndi fərz edək ki, (1) tənliyi ilə təyin olunan ikitərtibli səth mərkəzi səth deyil, yəni, bu tənlik üçün $I_3 = 0$ şərti ödənilir. Onda səthin tənliyini sadələşdirsək

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (8)$$

tənliyini alırıq. Bu tənliyin əmsallarından istifadə edərək onun təyin etdiyi ikitərtibli səthi müəyyənləşdirək. Burada üç əsas halı araşdıraq.

I. İkidərəcəli hədlərin əmsallarının hamısı sıfırdan fərqlidir, yəni,

$a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ və $a_{33} \neq 0$ şərti ödənilir.

II. İkidərəcəli hədlərin əmsallarından biri sıfıra bərabərdir, digər ikisi isə sıfırdan fərqlidir, məsələn: $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ və $a_{33} = 0$

III. İkidərəcəli hədlərin əmsallarından biri sıfırdan fərqlidir, ikisi isə sıfıra bərabərdir, yəni, $a_{11} = 0, a_{22} = 0$ və $a_{33} \neq 0$

Birinci halda

$$x' = x + \frac{a}{a_{11}}; \quad y' = y + \frac{b}{a_{22}}; \quad z' = z + \frac{c}{a_{33}}$$

düsturlarının köməyi ilə yeni koordinat sisteminə keçsək (8) tənliyini

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + \delta = 0 \quad (9)$$

şəklində yazmaq olar. Əgər bu tənlikdə $\delta=0$ olduqda α, β və γ əmsalları eyni işarəli olsa (9) tənliyi xəyali konus təyin edir, α, β və γ əmsalları müxtəlif işarəli olduqda isə həqiqi konus təyin edir.

Tutaq ki, $\delta \neq 0$ və α, β və γ eyni işarəlidir. Əgər α, β, γ və δ eyni işarəlidirsə, (9) tənliyi xəyali ellipsoid təyin edir, δ əmsalının işarəsi α, β və γ əmsallarının işarəsinin əksinə olduqda isə həqiqi ellipsoid təyin edir.

$\delta \neq 0$ olduqda α, β, γ və δ əmsallarından ikisi eyni işarəli, digər ikisi isə əks işarəli olarsa, (9) tənliyi biroyuqlu hiperboloid təyin edir.

Əgər $\delta \neq 0$ olduqda α, β və γ əmsallarından birinin işarəsi digərlərinin əksidirsə, (9) tənliyi ikioyuqlu hiperboloid təyin edir.

İkinci halda

$$x' = x + \frac{a}{a_{11}}; \quad y' = y + \frac{b}{a_{22}}; \quad z' = z$$

əvəzləmələri ilə yeni koordinat sistemində keçsək, (8) tənliyini

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + 2pz' + q = 0 \quad (10)$$

şəklində yazmaq olar. Burada aşağıdakı hallar mümkündür.

1. Əgər $p=0$ və $q=0$ olsa, (10) tənliyini

$$x' \pm \sqrt{-\beta/\alpha} y' = 0$$

şəklində yazmaq olar. Sonuncu tənlikdə α və β əmsalları eyni işarəli olsa, tənlik xəyali müstəvini, müxtəlif işarəli olduqda isə həqiqi müstəvini təyin edir.

2. Tutaq ki, $p=0$ və $q \neq 0$. Onda (10) tənliyi α , β və q əmsalları eyni işarəli olduqda xəyali, müxtəlif işarəli olduqda isə həqiqi silindiri təyin edir. Belə ki, α və β əmsalları eyni işarəli olarsa, elliptik silindir, müxtəlif işarəli olduqda isə hiperbolik silindir təyin edir.

3. Əgər $p \neq 0$ olsa,

$$x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = z' + \frac{q}{2p}$$

əvəzləməsindən istifadə etsək (10) tənliyinin yeni koordinatlarla ifadəsi

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + 2pz' = 0 \quad (11)$$

olar. Bu tənlik α və β əmsalları eyni işarəli olduqda elliptik, müxtəlif işarəli olduqda isə hiperbolik paraboloid təyin edir.

Üçüncü halda, yəni, (8) tənliyində $a_{11}=0$, $a_{22}=0$ və $a_{33} \neq 0$ olduqda

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + \frac{c}{a_{33}}$$

əvəzləməsindən istifadə etməklə yeni koordinatlara keçsək, (8) tənliyi

$$\gamma z'^2 + px + qy + r = 0 \quad (12)$$

şəklinə düşər. Bu tənlikdə $p=0$ və $q=0$ olarsa

$$\gamma z'^2 + r = 0$$

tənliyi alınır ki, son tənlik γ və r eyni işarəli olduqda iki paralel xəyalı müstəvini təyin edir, γ və r müxtəlif işarəli olduqda isə həqiqi paralel müstəviləri təyin edir və bu halda $r=0$ olsa, müstəvilər üst-üstə düşür.

Əgər p və q əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqli olsa, koordinat sistemini koordinat başlanğıcı ətrafında elə çevirmək olar ki, yeni absis oxu $px + qy + r = 0$ müstəvisinə paralel olar. Onda $q \neq 0$ olduqda (12) tənliyindən

$$\gamma x'^2 + qy = 0$$

tənliyi alınar. Bu tənlik doğuranları Ox oxuna paralel olan silindirin tənliyidir.

Yuxarıda göstərilən səthlərin həndəsi xassələrini öyrənək.

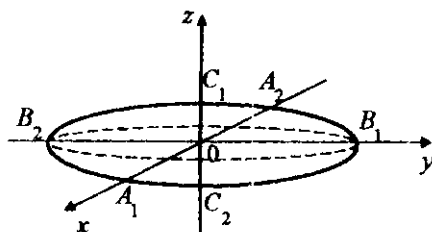
§6. ELLİPSOİD VƏ ONUN XASSƏLƏRİ.

Fəzada koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna ellipsoid deyilir. Bu tənliyə ellipsoidin kanonik tənliyi deyilir. Tənlikdən görünür ki, ellipsoid ikitərtibli səthdir a, b və c müsbət ədədlərdir və ellipsoidin yarımmoxları adlanırlar. $O(0,0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (1) tənliyini ödəmir, yəni, ellipsoid koordinat başlanğıcından keçmir. $y=0$ və $z=0$ olduqda (1) tənliyindən $x=a$ və $x=-a$; $x=0$ və $z=0$ olduqda $y=b$ və $y=-b$; $x=0$ və $y=0$ olduqda isə $z=c$ və $z=-c$ qiymətləri

alınır. Deməli, ellipsoid absis oxu ilə $A_1(a,0,0)$ və $A_2(-a,0,0)$; ordinat oxu ilə $B_1(0,b,0)$ və $B_2(0,-b,0)$; aplikat oxu ilə isə $C_1(0,0,c)$ və $C_2(0,0,-c)$ nöqtələrində kəşir. Bu nöqtələrə ellipsoidin təpə nöqtələri deyilir. A_1A_2, B_1B_2 və C_1C_2 onun oxları adlanır. Oxların kəsişmə nöqtəsinə ellipsoidin mərkəzi deyilir.



Dəyişənlər (1) tənliyinə cüt qüvvətdən daxil olduqlarına görə $M(x,y,z)$ nöqtəsi ellipsoid üzərində yerləşdikdə $M_1(-x,y,z), M_2(x,-y,z), M_3(x,y,-z), M_4(x,-y,-z), M_5(-x,y,-z), M_6(-x,-y,z)$ və $M_7(-x,-y,-z)$ nöqtələri də ellipsoid üzərində yerləşər; buradan görünür ki, ellipsoid koordinat oxlarına, koordinat müstəvilərinə və koordinat başlanğıcına görə simmetrikdir.

Ellipsoidin (1) tənliyindən $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ və $-c \leq z \leq c$ alındığına görə ellipsoid tamamilə ölçüləri $2a, 2b$ və $2c$ olan paralelepipedin daxilində yerləşir. Ellipsoid kürənin iki perpendikulyar müstəviyə nəzərən sıxılması nəticəsində alınır. Doğrudan da, a ellipsoidin böyük yarımoxu olarsa, onda bu ellipsoidi

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

kürəsini XOY müstəvisinə nəzərən $\frac{c}{a}$ əmsalına; XOZ müstəvisinə nəzərən isə

$\frac{b}{a}$ əmsalına mütənəsib qüvvələrlə sıxsaq (1) ellipsoidini alarıq. Əgər ellipsoidin

iki yarımxu bərabər olarsa, məsələn $a = b$ olarsa, onun tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

şəklinə düşər. Bu ellipsoidə fırlanma ellipsoidi deyilir.

Ellipsoidin $z = h$ müstəvisi ilə kəsişməsinə baxaq. Əgər z dəyişəninin bu qiymətini (1) tənliyində nəzərə alsaq

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad (3)$$

yaxud

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad (4)$$

tənliyini alarıq. Bu tənlik yarımxları

$$a_1 = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}; \quad b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

olan ellipsdir. Deməli, (1) ellipsoidinin $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyi ellipsdir.

h ədədi sıfırdan c -yə qədər dəyişdikdə a_1 və b_1 əmsalları vahiddən sıfıra qədər

azalır. $h = c$ olduqda ellips hər hansı bir $M(0,0,c)$ nöqtəsinə yığılır. Ellipsoid ilə

yalnız bir ortaq $M(0,0,c)$ nöqtəsi olan $z=c$ müstəvisinə ellipsoidə toxunan müstəvi deyilir. h ədədi $(-c)$ -dən sıfıra qədər azaldıqda da ellips kiçilir. $h=-c$ olduqda isə $M_1(0,0,-c)$ nöqtəsinə yığılır, yəni, $z=-c$ müstəvisi Oz oxu üzərində M_1 nöqtəsində ellipsoidə toxunur. Əgər $|h|>c$ olarsa, $z=h$ müstəvisi ilə ellipsoidin ortaq nöqtəsi yoxdur.

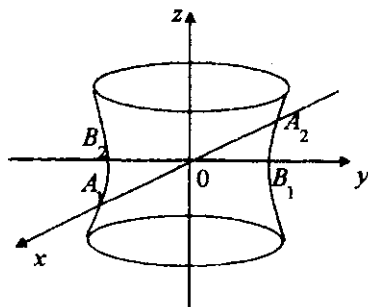
Əgər ellipsoidi uyğun olaraq XOZ və YOZ müstəvilərinə paralel $y=m$ və $x=l$ müstəviləri ilə kəssək, yenə də kəsikdə ellips alınar.

§7. BİROYUQLU HİPERBOLOİD.

Fəzada üçölçülü $Oxyz$ koordinat sistemində koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna biroyuqlu hiperboloid deyilir. Biroyuqlu hiperboloid koordinat başlanğıcından keçmir, yəni, $O(0,0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (1) tənliyini ödəmir. (1) tənliyi biroyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyi adlanır.



Koordinat oxlarını (absis və ordinat) uyğun olaraq $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$ və $B_1(b,0,0)$, $B_2(-b,0,0)$ nöqtələrində kəsir. Oz oxu ilə ortaq nöqtəsi yoxdur. A_1, A_2, B_1 və B_2 nöqtələri biroyuqlu hiperboloidin təpə nöqtələri adlanır. A_1A_2 və B_1B_2 oxları biroyuqlu hiperboloidin həqiqi oxlarıdır, Oz oxu isə xəyali oxudur. Həqiqi oxların kəsişmə nöqtəsinə biroyuqlu hiperboloidin mərkəzi deyilir. a, b və c ədədləri biroyuqlu hiperboloidin yarımxları adlanır, belə ki, a və b həqiqi yarımxlar, c isə xəyali yarımxdır. Verilmiş a, b və c yarımxları müxtəlif olduqda (1) hiperboloidinə üçoxlu biroyuqlu hiperboloid deyilir. Əgər $a=b$ olarsa, hiperboloidə biroyuqlu fırlanma hiperboloidi deyilir. Biroyuqlu hiperboloid koordinat oxlarına, koordinat müstəvilərinə və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

Biroyuqlu hiperboloidin $z=h$ müstəvi ilə kəsiyinə baxaq:

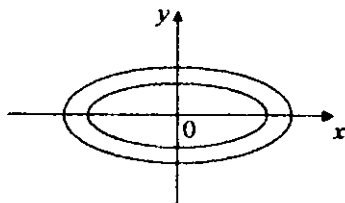
Bu qiyməti (1) tənliyində nəzərə alsaq:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Burada $a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ işarə edilmişdir. Deməli (1)

biroyuqlu hiperboloidin $z=h$ müstəvisi ilə kəsiyinin XOY müstəvisi üzərində

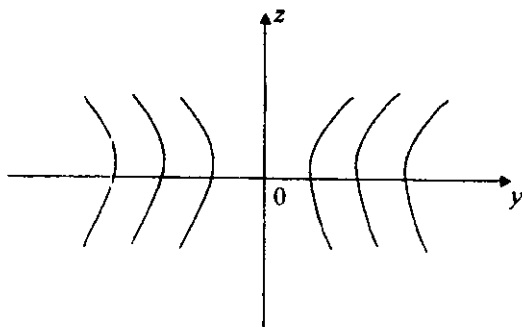
proyeksiyası yarımxları a_1 və b_1 olan ellipsdir. Aydındır ki, h -ın müxtəlif qiymətlərində müxtəlif ellipslər alınır.



$h=0$ olduqda (1) yaxud (2) tənliyindən

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsi alınır. Bu ellipsə (1) tənliyi ilə təyin olunan biroyuqlu hiperboloidin boğaz ellipsi deyilir. h -ın $(-\infty)$ -dan $(+\infty)$ -a dəyişməsi ilə a_1 və b_1 yarımxları dəyişir. Ona görə də biroyuqlu hiperboloidə dəyişmə zamanı öz-özünə oxşar olan və oxlarının ucları XOZ və YOZ müstəviləri üzərində sürüşən ellipsin təşkil etdiyi səth kimi baxmaq olar. Əgər (1) tənliyində $a=b$ olarsa, hiperboloidə fırlanma oxu Oz olan biroyuqlu fırlanma hiperboloidi deyilir.



İndi isə biroyuqlu hiperboloidin YOZ müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiklərinə baxaq: Tutaq ki, biroyuqlu hiperboloid $x=l$ müstəvisi ilə kəşir.

Onda (1) tənliyindən

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{l^2}{a^2}$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik hiperbolanın tənliyi olduğundan kəşiyin YOZ müstəvisi üzərində proyeksiyaları yarımxları

$$b_2 = b \sqrt{1 - \frac{l^2}{a^2}}, \quad c_2 = c \sqrt{1 - \frac{l^2}{a^2}}$$

olan hiperboladır. l -in müxtəlif qiymətlərində müxtəlif hiperboloidlər ailəsi alınır. $a > l$ olduqda bu hiperbolaların həqiqi oxu Oy oxu, $a < l$ olduqda isə həqiqi ox Oz oxu olur.

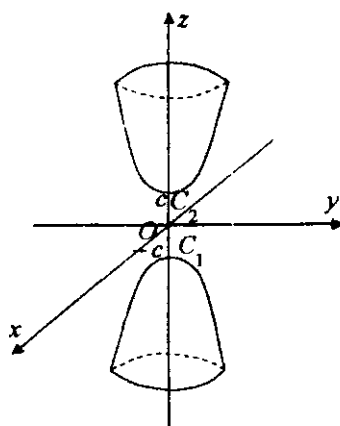
Qeyd olunanlardan aydın olur ki, bir hiperboloidin XOZ müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiklərinin XOZ müstəvisi üzərində proyeksiyaları da hiperboladır. Deməli, (1) səthini $x=0, y=0$ və $z=0$ müstəvilərinə paralel müstəvilərlə kəsdikdə, uyğun olaraq ellips və iki hiperbola alırıq ki, ellipsin proyeksiyası XOY müstəvisində, hiperbolaların proyeksiyaları isə uyğun olaraq XOZ və YOZ müstəvilərində yerləşir.

§8. İKİOYUQLU HİPERBOLOİD.

Verilmiş $Oxyz$ düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna ikiyüqlü hiperboloid deyilir. a, b və c onun yarımxları adlanır. (1) tənliyindən görünür ki, ikiyüqlü hiperboloid koordinat başlanğıcından keçmir. x, y və z dəyişənləri tənliyə cüt qüvvətdən daxil olduğundan belə nəticə çıxır ki, ikiyüqlü hiperboloid koordinat başlanğıcına, koordinat oxlarına və koordinat müstəvilərinə nəzərən simmetrikdir.



(1) səthi Oz oxunu iki $z=c$ və $z=-c$ nöqtələrində kəsir. $C_1(0,0,-c)$ və $C_2(0,0,c)$ kəsişmə nöqtələri ikiyüqlü hiperboloidin təpə nöqtələri adlanır. c ikiyüqlü hiperboloidin həqiqi yarımxı, a və b isə xəyali yarımxları

adlanır. Əgər $a=b$ olarsa, hiperboloidə ikiyüqlü fırlanma hiperboloidi deyilir. a , b və c ədədləri fərqli olduqda ona üçoxlu ikiyüqlü hiperboloid deyilir. (1) tənliyində $x=0$, $y=0$ olsa, $z \geq c$ və $z \leq -c$ şərtləri ödənilir. Deməli,

(1) ikiyüqlü hiperboloidi $z=c$ və $z=-c$ müstəviləri arasında yerləşmir.

Başqa sözlə, bu müstəvilər arasında onun nöqtələri yoxdur.

İkiyüqlü hiperboloidin müstəvi kəsiklərini araşdırıq.

Əgər (1) tənliyində $z=h$ qəbul etsək həmin tənlikdən

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

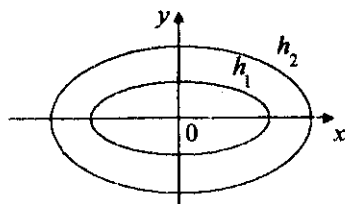
yaxud

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyini alırıq. Burada

$$a_1 = a \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \quad (3)$$

işarə edilmişdir.



(2) tənliyi yarımoxları a_1 və b_1 olan ellipsdir. Deməli, (1) ikioyuqlu hiperboloidinin $z=h$ müstəvisi ilə kəsiyinin XOY müstəvisində proyeksiyası ellipsdir. Aydınır ki, $|h| < c$ olduqda $z=h$ müstəvisi ilə ikioyuqlu hiperboloidin ortaq nöqtəsi yoxdur. $h=c$ olduqda (1) tənliyindən

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

tənliyi alınır. Deməli, bu halda $z=h$ müstəvisi ilə ikioyuqlu hiperboloidin bir ortaq $C_1(0,0,c)$ nöqtəsi var. Onda $z=c$ müstəvisi (1) ikioyuqlu hiperboloidinə $C_1(0,0,c)$ nöqtəsində toxunur deyilir. Eyni qayda ilə $C_2(0,0,-c)$ nöqtəsinin də toxunma nöqtəsi olduğunu təyin etmək olar.

Əgər $h=0$ olsa, (1) tənliyindən

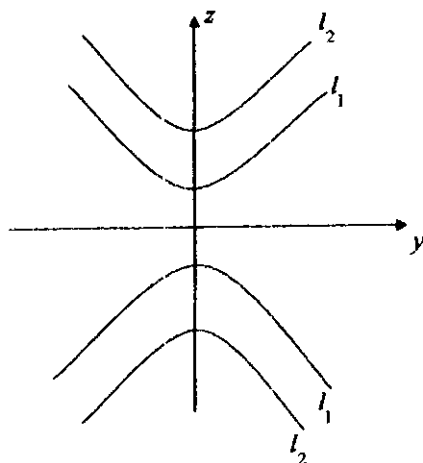
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

tənliyi alınır. Deməli, ikioyuqlu hiperboloidlə XOY müstəvisinin ortaq nöqtəsi yoxdur. h -ın qiymətləri c -dən $(+\infty)$ -a və $(-c)$ -dən $(-\infty)$ -a qədər dəyişdikdə yarımoxlarının artdığı (3) bərabərliklərindən görünür. Bu zaman birinci halda hiperboloidin bir oyuğu, ikinci halda isə digər oyuğu alınır.

Əgər ikioyuqlu hiperboloidi $x=l$ müstəvisi ilə kəssək, kəsikdə

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{l^2}{a^2}$$

hiperobolası alınar. Bu hiperobolanın həqiqi oxu Oz , xəyali oxu isə Oy oxudur. Aydındır ki, l -in müxtəlif qiymətlərində YOZ müstəvisində yerləşən hiperbolalar ailəsi təyin olunur.



Eyni qayda ilə $y = m$ müstəvisi ilə ikioyqlu paraboloidin kəsişməsindən alınan hiperbolalar ailəsi təyin etmək olar. Bu hiperbolaların proyeksiyaları XOZ müstəvisində yerləşir və Ox oxu xəyali ox olur.

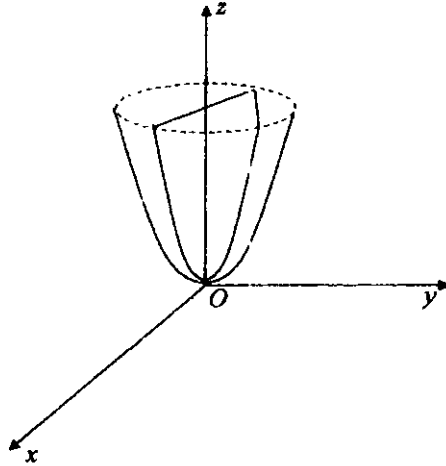
§9. PARABOLOİDLƏR.

1. Elliptik paraboloid.

Düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sistemində koordinatları

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (1)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna elliptik paraboloid deyilir. Koordinat başlanğıcının koordinatları (1) tənliyini ödədiyinə görə elliptik paraboloid koordinat başlanğıcından keçir. x və y dəyişənləri (1) tənliyinə ikinci dərəcədən daxil olduğuna görə XOZ və YOZ müstəviləri elliptik paraboloidin simmetriya müstəviləridir. XOY müstəvisinə görə simmetrik deyil. Əgər (1) tənliyində $p = q$ olarsa, tənlik fırlanma oxu Oz olan fırlanma paraboloidini təyin edir. Elliptik paraboloid Oz oxuna görə simmetrikdir. Ox və Oy oxlarına görə simmetrik deyil.



(1) tənliyindən görünür ki, $z \geq 0$ şərti ödənilir, yəni, elliptik paraboloid XOY müstəvisindən bir tərəfdə yerləşir. Elliptik paraboloidin $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyinə baxaq:

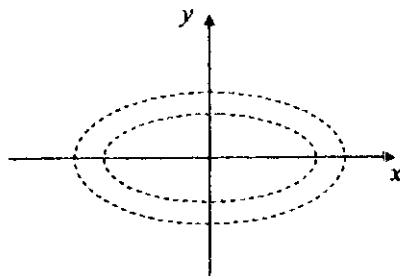
Bu halda (1) tənliyi

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h$$

yaxud

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \quad (2)$$

şəklinə düşür. (2) tənliyi yarımxoxları $2ph, 2qh$ olan ellipsin tənliyidir. Deməli, elliptik paraboloidin XOY müstəvisinə paralel $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyi ellipsdir. Ona görə də h ədədi sıfırdan ∞ -a qədər dəyişdikdə ellips parabolunu əmələ gətirir.

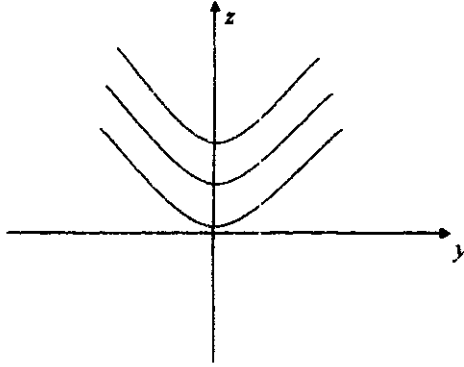


Qeyd edək ki, (2) tənliyinin $h > 0$ olduqda mənası vardır.

Əgər (1) tənliyində $x = l$ qəbul etsək, yəni, elliptik paraboloidi YOZ müstəvisinə paralel $x = l$ müstəvisi ilə kəssək, kəsiyin tənliyi

$$y^2 = 2z - \frac{q}{p}l \quad (3)$$

olar. (3) tənliyindən görünür ki, kəsiyin YOZ müstəvisi üzərində olan proyeksiyaları simmetriya oxu Oz olan parabolalardır.



Eyni qayda ilə (1) elliptik paraboloidinin $y = m$ müstəvisi ilə kəsiyinin parabola olduğunu təyin etmək olar.

2. Hiperbolik paraboloid.

Üçölçülü düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları

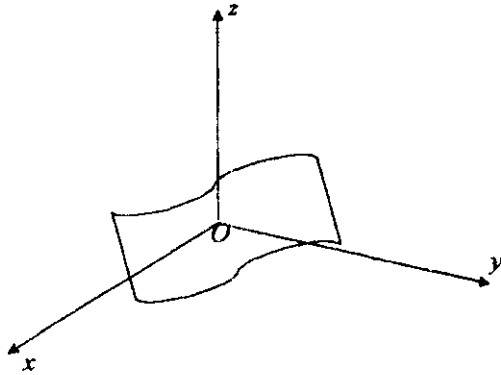
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (4)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna hiperbolik paraboloid deyilir. (4)

tənliyindən görünür ki, hiperbolik paraboloid koordinat başlanğıcından keçir.

XOZ və YOZ müstəvilərinə görə simmetrikdir.

Oz simmetriya oxudur. Ox və Oy oxlarına görə simmetrik deyil.



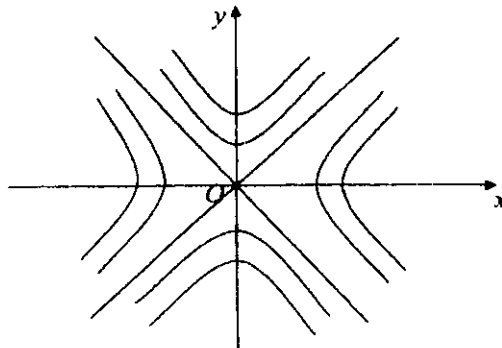
Əgər (4) tənliyində $z = h$ qəbul etsək

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h$$

yaxud

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \quad (5)$$

tənliyini alırıq. Deməli hiperbolik paraboloidin $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyi hiperboladır. $h > 0$ olduqda hiperbolanın həqiqi oxu Ox oxuna paralel, $h < 0$ olduqda Oy oxuna paralel olar, yəni, qoşma hiperbolalar alınır. Bu hiperbolaların ortaq asimptotları vardır.



Əgər $z = h = 0$ olsa, yəni, XOY müstəvisinin (4) səthi ilə kəsişməsi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0, z = 0$$

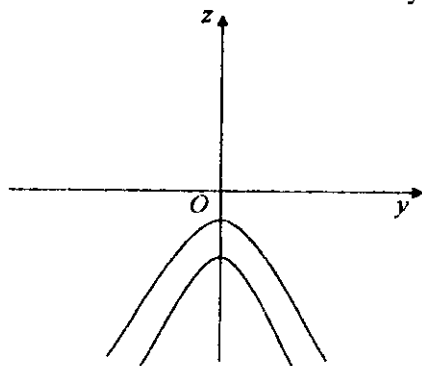
xəttini verir. Bu xəttin tənliyi

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, z = 0$$

və

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, z = 0$$

kimi iki tənliyə ayrılır. Səth ilə müstəvi iki düz xətt boyunca kəşir.

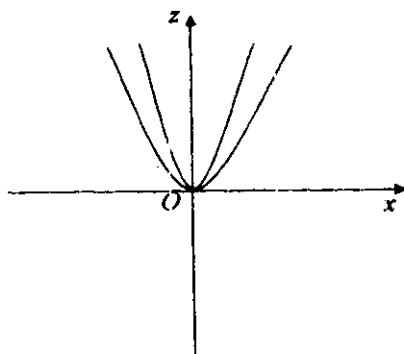


Əgər (4) tənliyində $x = l$ qəbul etsək:

$$y^2 = -2qz + \frac{ql^2}{p}$$

tənliyini alırıq. Sonuncu tənlik parabola tənliyidir. Deməli, (4) səthinin YOZ müstəvisinə paralel $x = l$ müstəvisi ilə kəsiyi paraboladır və bu parabolalar eyni

bir parametrlı olmaqla təpə nöqtələrinin koordinatları bərabərdir.



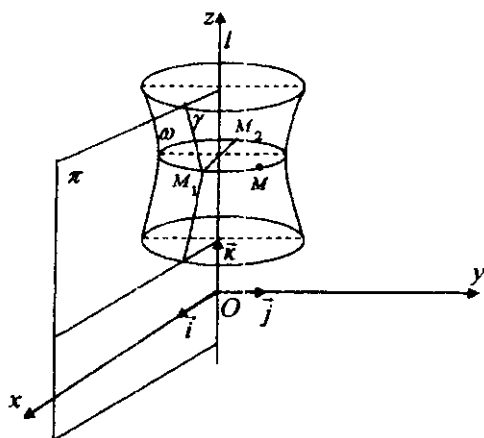
Əgər (4) tənliyini xOz müstəvisinə paralel $y = m$ müstəvisi ilə kəssək

$$x^2 = 2qz + m^2 \frac{p}{q}$$

tənliyi ilə təyin olunan parabolalar ailesini alırıq.

§ 10. FIRLANMA SƏTHLƏRİ.

Əgər səthin ixtiyari nöqtəsinin hər hansı bir ox ətrafında fırlanmasından alınan çevrə səth üzərində yerləşərsə, belə səthə fırlanma səthi deyilir. Əgər səthin ixtiyari M nöqtəsini götürüb l oxu ətrafında fırlatsaq, bu nöqtənin cızdığı çevrə fırlanma səthi üzərində yerləşər. l -ə fırlanma oxu deyilir. Deməli, S fırlanma səthinin l oxuna perpendikulyar müstəvi ilə kəsiyi çevrədir. Bu çevrələrə səthin paralelləri deyilir və çevrələrin mərkəzi l oxu üzərində yerləşir.



Fırlanma səthinin onun oxundan keçən ixtiyari müstəvi ilə kəsiyi fırlanma səthinin meridianları adlanır. Fırlanma səthinə aşağıdakı şəkildə təyin etmək olar:

İxtiyari π müstəvisi üzərində γ xətti və l düz xətti götürək. Onda γ xəttinin l düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan səth fırlanma səthi olar. Onda γ xətti fırlanma səthinin doğuranı adlanır. Doğuran üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtənin l oxu ətrafında fırlanmasından alınan çevrələr isə fırlanma səthinin paralelləri olar.

Fırlanma səthinin tənliyini təyin etmək üçün koordinat başlanğıcını fırlanma oxu üzərində yerləşdirək və tutaq ki, Ox oxu π müstəvisi üzərində, Oz oxu isə l fırlanma oxu üzərində yerləşir. Onda O nöqtəsi və XOZ π

müstəvisi üzərində dekart koordinat sistemi təşkil edər. Tutaq ki, γ fırlanma xətti XOZ koordinat sistemində

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

tənliyi ilə verilmişdir. S fırlanma səthi üzərində ixtiyari $M(x, y, z)$ nöqtəsi götürək. Səthin M nöqtəsindən keçən ω çevrəsinin mərkəzi M_0 nöqtəsi olsun.

ω çevrəsinin π müstəvisi ilə kəsişmə nöqtələrini M_1 və M_2 , radiusunu isə r ilə işarə edək. Onda M_1 və M_2 nöqtələrinin koordinatları $M_1(r, 0, z)$ və $M_2(-r, 0, z)$ olar. M nöqtəsinin l fırlanma oxundan olan məsafəsi r -ə bərabər olduğundan və M_1, M_2 nöqtələri ω çevrəsi üzərində yerləşdiyindən

$$\overline{M_0 M} = \overline{M_0 M_1} = \overline{M_0 M_2} = r$$

olar. ω çevrəsinin ixtiyari nöqtəsinin aplikatı bir-birinə bərabər olduğundan

$M(x, y, z)$ nöqtəsinin $M_0(0, 0, z)$ nöqtəsindən olan məsafəsi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olar. Deməli, M nöqtəsinin fırlanma səthi üzərində yerləşməsi üçün M_1 və M_2

nöqtələrindən heç olmasa biri γ əyrisi üzərində yerləşməlidir.

Əgər M nöqtəsi γ əyrisi üzərindədirsə, onun koordinatları (1) tənliyini ödəməlidir, yəni, $x=r$ şərti ödənməlidir. Onda $r=f(z)$ olduğundan, səthin tənliyini

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

şəklində yazmaq olar. Deməli, XOZ müstəvisində yerləşən γ əyrisinin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyini almaq üçün həmin əyrinin tənliyində x dəyişəninin əvəzinə $x^2 + y^2$ ifadəsini yazmaq kifayətdir, yəni, XOZ müstəvisində yerləşən $x=f(z)$ əyrisinin fırlanma səthinin tənliyi

$$x^2 + y^2 = f^2(z) \quad (2)$$

olar. Analogi qayda ilə XOY müstəvisində yerləşən əyrinin fırlanmasından alınan səthin tənliyi

$$y^2 + z^2 = f^2(x) \quad (3)$$

şəklində; YOZ müstəvisində yerləşən əyrinin fırlanma səthinin tənliyi isə

$$x^2 + z^2 = f^2(y) \quad (4)$$

şəklində təyin olunur.

Yuxarıda göstərilən tənliklərə əsasən bəzi ikitərtibli əyrilərin öz simmetriya oxları ətrafında fırlanmasından alınan fırlanma səthlərinin tənliklərini təyin etmək olar.

1. Fırlanma ellipsoidləri.

Tutaq ki, YOZ müstəvisində

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipsi verilmişdir. Bu ellipsin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyini təyin edək. Bu tənlikdən y^2 -ni təyin etsək

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

olar. Tapılmış qiyməti (4) tənliyində nəzərə alsaq

$$x^2 + z^2 = b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

yaxud

$$\frac{x^2 + z^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

tənliyini alırıq. Həmin ellipsin Oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyi isə

$$\frac{x^2 + z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

şəklində olar. Bu bərabərlikdə $b > c$ olduqda (6) ellipsoidi uzanmış, (5) ellipsoidinə isə sıxılmış ellipsoid deyilir. Aydındır ki, hər iki halda $b = c$ olsa, alınmış fırlanma səthi kürəyə çevrilir.

2. Fırlanma hiperboloidləri.

Tutaq ki, γ hiperbolası düzbucaqlı $\{O, \bar{i}, \bar{k}\}$ koordinat sistemində XOZ müstəvisində

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu əyrinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin tənliyini tapaq.

Əgər verilmiş hiperbolanı Ox oxu ətrafında fırlatsaq

$$z^2 = c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

olduğundan

$$y^2 + z^2 = c^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

yaxud

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik ikioyuqlu hiperboloidin tənliyidir. Əgər verilmiş hiperbolanı Oz oxu ətrafında fırlatsaq verilmiş tənlikdən

$$x^2 = a^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

olduğuna görə

$$y^2 + x^2 = a^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right)$$

yaxud

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik biroyuqlu hiperboloidi təyin edir.

3. Fırlanma paraboloidi.

Tutaq ki, γ əyrisi düzbucaqlı koordinat sistemində YOZ müstəvisində

$$y^2 = 2pz$$

tənliyi ilə verilmişdir. Bu tənlik simmetriya oxu Oz olan paraboladır. Əgər parabolanı simmetriya oxu ətrafında fırlatsaq, fırlanmadan alınan səthin tənliyi

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

olar. Bu səth fırlanma paraboloidi adlanır. Sonuncu tənliyi

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$$

şəklində yazmaq olar. Eyni qayda ilə $x^2 = 2qz$, $y = 2mx^2$ parabolalarının öz simmetriya oxları ətrafında fırlanmasından alınan fırlanma paraboloidlərin tənliklərini təyin etmək olar.

4. Fırlanma konusu.

Tutaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində YOZ müstəvisi üzərində

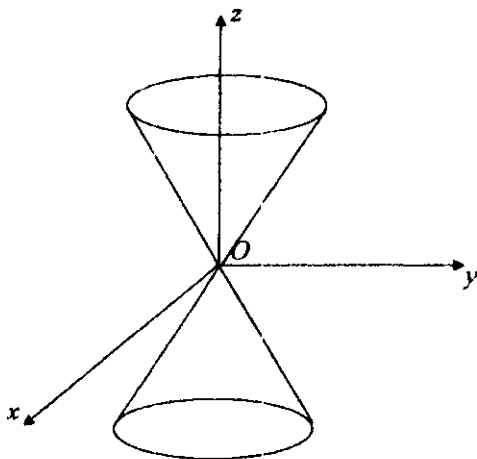
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tənliyi ilə y xətti verilmişdir. Bu tənliyi

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

şəklində yazsaq, bu tənliklərin həmin müstəvidə kəsişən iki düz xətt təyin etdiyi aydınlaşar.



Kəsişən iki düz xəttin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınan səth fırlanma konusu adlanır və

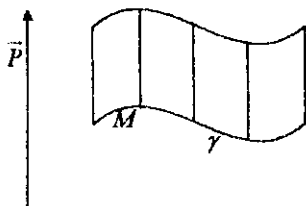
$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tənliyi ilə təyin olunur.

§ 11. SİLİNDİRİK SƏTHLƏR.

Əgər səthin ixtiyari nöqtəsindən keçən düz xətt səth üzərində yerləşirsə və hər hansı bir oxla paralel olarsa belə səthə silindirik səth deyilir. Silindirik səthi aşağıdakı şəkildə təyin etmək olar:

Tutaq ki, ixtiyari γ xətti və $\vec{p}$ vektoru verilmişdir. γ əyrisinin istənilən nöqtəsindən keçən düz xətt $\vec{p}$ vektoruna paralel olarsa, bu düz xətlər çoxluğu səth əmələ gətirər. Bu səth silindirik səth olar. Deməli, səthin ixtiyari M nöqtəsindən keçən və $\vec{p}$ vektoruna paralel olan düz xətt səth üzərində yerləşirsə, belə səthə silindirik səth deyilir.



$\vec{p}$ vektoruna silindirik səthin oxu deyilir. $\vec{p}$ vektoruna paralel olan düz xətlər silindirik səthin doğruları adlanır. γ xətti isə silindirik səthin yönəldicisi adlanır. Əgər $\vec{p}$ vektoru əvəzinə fəzada koordinat oxlarının birini götürsək, onda doğruları həmin oxla paralel olan silindirik səth alırıq. Məsələn

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

tənliyi doğuranları Oz oxuna paralel olan silindirik səthi təyin edir. Bu səthi S , istənilən nöqtəsini $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ilə işarə edək.

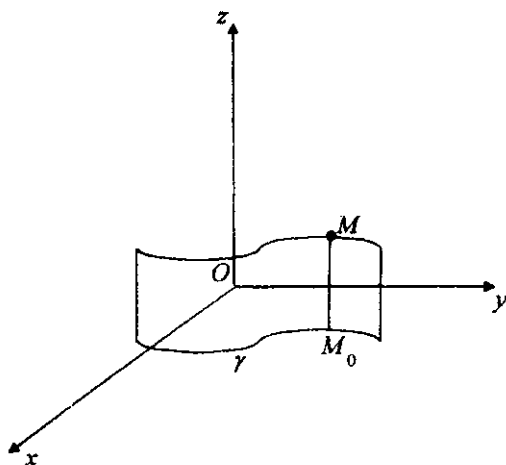
Onda $M(x_0, y_0, z)$ nöqtəsi də S səthi üzərində olar. Bu o deməkdir ki, M_0M düz xətti S səthi üzərində yerləşir və Oz oxuna paraleldir, yəni, (1) tənliyi doğuranları Oz oxuna paralel olan silindirik səthi təyin edir. Onda bu səthin yönəldicisi XOY müstəvisində

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

tənliyi ilə təyin olunan γ əyrisi olar. Buradan aydın olur ki, $\Phi(x, z) = 0$ tənliyi doğuranları Oy oxuna paralel olan silindirik səthin,

$$G(y, z) = 0$$

tənliyi isə doğuranları Ox oxuna paralel olan silindirik səthin tənliyidir.

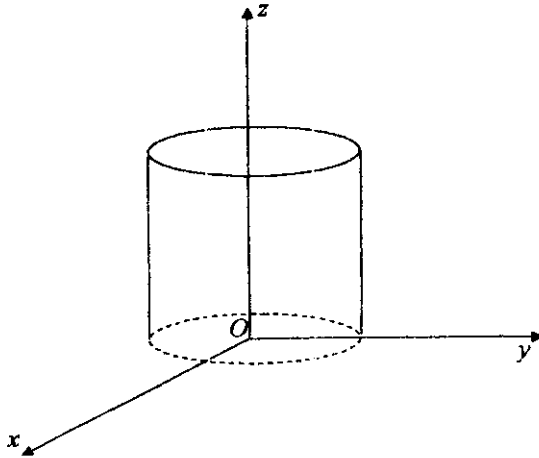


Yönəldici olaraq XOY müstəvisində yerləşən müxtəlif əyrilər götürməklə müxtəlif silindirik səthlər almaq olar. Bu halda ikitərtibli əyriləri götürmək daha münasib olduğundan aşağıdakı silindirik səthlərə baxaq:

1. Elliptik silindir. Düzbucaqlı $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ koordinat sisteminə koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna elliptik silindir deyilir. (2) tənliyi ellipsin kanonik tənliyidir. Ellips ikitərtibli əyridir və silindirik səthin yönəldicisidir. Elliptik silindir koordinat oxlarına və müstəvilərinə görə simmetrikdir. Oz oxu elliptik silindirin oxudur.



Əgər (2) tənliyində $a=b$ olarsa alınan səthə düz dairəvi silindir deyilir. Elliptik silindir XOY müstəvisinə paralel olan hər bir müstəviyə görə simmetrikdir. Elliptik silindirin Oz oxuna paralel ixtiyari müstəvi ilə kəsiyi düz xətdir. Bu düz xətt (1) ellipsini

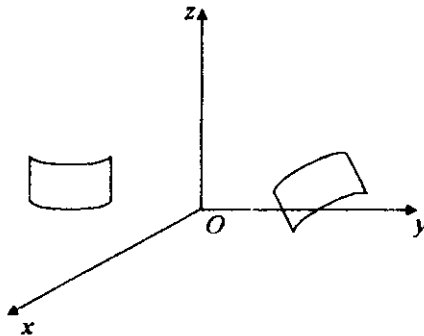
- a) iki nöqtədə kəsir
- b) bir nöqtədə toxunar
- c) heç bir ortaq nöqtəsi yoxdur, yəni, kəsməz.

Elliptik silindirin Oz oxuna paralel olmayan müstəvi ilə kəsiyi ellipsdir.

2. Hiperbolik silindir. Ortonormal $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ reperində koordinatları

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna hiperbolik silindir deyilir. Bu səthin yönəldicisi hiperboladır. Hiperbolik silindirin iki oyugu var.

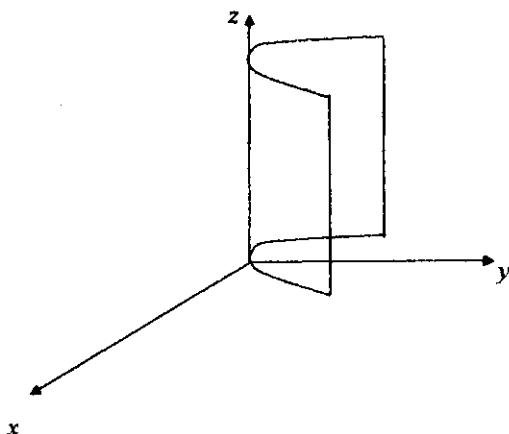


Hiperbolik silindir koordinat müstəvilərinə və XOY müstəvisinə paralel olan müstəviyə görə simmetrikdir. Oz oxuna paralel müstəvi ilə XOY müstəvisinin kəsişməsi düz xəttədir. Bu düz xətt (3) hiperbolasını iki nöqtədə, bir nöqtədə kəsə bilər yaxud kəsməz. Toxuna da bilər. Oz oxuna paralel olmayan müstəvi ilə hiperbolik silindirin kəsiyi hiperboladır.

Analoji qayda ilə yönəldicisi XOY müstəvisində yerləşən və

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0)$$

tənliyi ilə təyin olunan parabolik silindiri təyin etmək olar.



§ 12. İKİTƏRTİBLİ KONUS.

Düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sistemində koordinatları

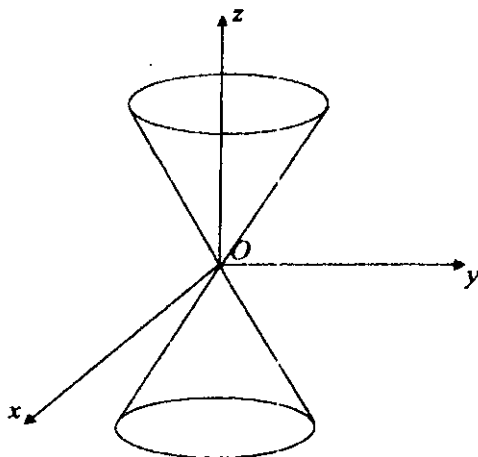
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğuna ikitərtibli konus deyilir. Burada $a > 0$, $b > 0$

və $c > 0$ şərti ödənilir. (1) tənliyinə ikitərtibli konusun kanonik tənliyi deyilir.

Əgər $a = b$ olarsa, konusa fırlanma konusu deyilir. İkitərtibli konus koordinat

başlangıcına və koordinat müstəvilərinə görə simmetrikdir.



Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsi S ikitərtibli konus üzərindədir. Onda bu

nöqtənin koordinatları (1) tənliyini ödəməlidir, yəni

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$$

olmalıdır. Onda səth üzərində yerləşən ixtiyari $M(tx_0, ty_0, tz_0)$ nöqtəsi üçün

$$t^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0$$

tənliliyini yazmaq olar. Burada t dəyişənin müxtəlif qiymətlərində OM_0 düz xətti əmələ gəlir. Bu o deməkdir ki, ikitərtibli konus koordinat başlanğıcından keçən düz xətlərdən əmələ gəlir və $O(0,0,0)$ nöqtəsi onun təpə nöqtəsi adlanır.

Əgər $M(x, y, z)$ nöqtəsi ikitərtibli konus üzərindədirsə, onda $M_1(-x, y, z)$, $M_2(x, -y, z)$, $M_3(x, y, -z)$, $M_4(x, -y, -z)$, $M_5(-x, y, -z)$, $M_6(-x, -y, z)$ və $M_7(-x, -y, -z)$ nöqtələri də həmin səth üzərində yerləşir.

Bu o deməkdir ki, ikitərtibli konus koordinat oxlarına görə simmetrikdir.

İndi isə (1) ikitərtibli konusun koordinat müstəvilərinə paralel müstəvilərlə kəsişməsini araşdıraraq. Əgər onu $z = h$ müstəvisi ilə kəsək, kəsikdə

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

yaxud

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

tənliyi ilə təyin olunan ellips alınır. Burada $a_1^2 = \frac{a^2 h^2}{c^2}$, $b_1^2 = \frac{b^2 h^2}{c^2}$ işarə edilmişdir. Son bərabərlikdən görünür ki, $h=0$ olarsa kəsik yalnız $O(0,0,0)$ nöqtəsini təyin edir. $h \neq 0$ olduqda isə ikitərtibli konusun XOY müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiyi ellipsdir. Əgər (1) tənliyində $y=l$ olsa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{l^2}{b^2}$$

tənliyini alırıq. Bu tənlikdə $l=0$ olsa

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \vee \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$$

tənliklərini alırıq. Bu tənliklər kordinat başlanğıcından keçən müstəvilər təyin edir. Əgər $l \neq 0$ olsa, kəsikdə hiperbolalar alınır. Deməli, ikitərtibli konusun XOZ müstəvisinə paralel müstəvilərlə kəsiyi hiperboladır. Eyni nəticəni $x=m$ olduqda da analogi qayda ilə almaq olar.

Bizə məlumdur ki, biroyuqlu hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3)$$

tənliyi ilə təyin edilir. Bu tənlikdə $z=h$ olsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

tənliyi ilə təyin olunan ellips alırıq. Əgər (3) tənliyində $z=h$ olsa

$$\frac{x^2}{a_1'^2} + \frac{y^2}{b_1'^2} = 1 \quad (5)$$

tənliyi ilə təyin olunan elleps alırıq. Burada $a_1' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$; $b_1' = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ işarə edilmişdir. Sonuncu bərabərliklərdən görünür ki, $a_1 < a_1'$, $b_1 < b_1'$ şərtləri ödənilir. Bu o deməkdir ki, (4) ellipsi (5) ellipsinin daxilində yerləşir. Buradan isə (1) ikitərtibli konusunun (3) biroyuqlu hiperboloidinin daxilində yerləşməsi nəticəsi alınır. Əgər $h \rightarrow \infty$ olarsa, onda $a_1' \rightarrow a_1$ və $b_1' \rightarrow b_1$ şərtləri ödənilir. Bu halda (1) ikitərtibli konusunun və (3) biroyuqlu hiperboloidin $z = h$ müstəvisi ilə kəsişməsindən alınan ellipslər bir-birinə yaxınlaşır.

Onda (1) ikitərtibli konusuna (3) biroyuqlu hiperboloidinin asimptotik konusu deyilir.

§ 13. KONUS KƏSİKLƏRİ.

Tutaq ki, $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (1)$$

ikiteərtibli konusu verilmişdir. Bu konusun XOY müstəvisinə paralel $z = h$ müstəvisi ilə kəsiyi ellipsdir. Bu ellipsi γ ilə işarə edək. Konusun təpəsindən

keçən və Oz oxuna paralel olmayan α müstəvisi ilə kəsiyi isə l olsun. Onda burada aşağıdakı hallar mümkündür.

- 1) l xətti γ əyrisini iki nöqtədə kəsər.
- 2) l xətti γ əyrisinə bir nöqtədə toxunar.
- 3) l xətti ilə γ əyrisinin heç bir ortaq nöqtəsi olmaz.

Qeyd olunanlara əsasən, müstəviləri üç qrupa bölmək olar. Birinci halda γ əyrisini iki nöqtədə kəsən müstəvini α_1 , ikincidə γ əyrisi ilə bir ortaq nöqtəsi olan müstəvini α_2 , üçüncü halda γ əyrisini kəsməyən müstəvini α_3 ilə işarə edək. Bu halda α_3 müstəvisi ilə (1) ikitərtibli konusun yalnız bir ortaq nöqtəsi olar. İkinci halda α_2 müstəvisi (1) ikitərtibli konusa onun doğuranı üzrə toxunur. Ona görə də yuxarıda qeyd olunan birinci halda α_1 müstəvisi (1) ikitərtibli konusu iki doğuran üzrə kəsər.

Deməli, ikitərtibli konusun təpə nöqtəsindən keçməyən müstəvi ilə kəsikləri ikitərtibli əyrilərdir, yəni, konusun təpə nöqtəsindən keçməyən müstəvi ilə kəsikləri ellips, hiperbola və paraboladır. Bu ikitərtibli əyrilərə konus kəsikləri deyilir.

§ 14. İKİTƏRTİBLİ SƏTHLƏRİN DÜZXƏTLİ DOĞURANLARI.

Düz xəttin hərəkəti ilə əmələ gələn səthə xətti səth, bu səth üzərində yerləşən düz xətlərə isə düzxətli doğuranlar deyilir.

Silindirik və konik səthlər düzxətli doğuranlara malik səthlərdir. Fırlanma səthlərinin düzxətli doğuranları olmaya da bilər. Tutaq ki, $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koordinat sistemində S səthi və l düz xətti verilmişdir. Əgər l düz xətti S səthi üzərində yerləşirsə l düz xətti S səthinin düzxətli doğuranı olar.

Ellipsoid məhdud səth olduğundan onun düzxətli doğuranı yoxdur. Bilirik ki, ikioyulu hiperboloidin $z = c$ və $z = -c$ müstəviləri arasında nöqtələri yoxdur, ona görə də düz xəttin də həmin müstəvilər arasında nöqtələri olmaz. Deməli, ikioyulu hiperboloidin düzxətli doğuranı yoxdur. Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, biroyulu hiperboloidin və hiperbolik paraboloidin düzxətli doğuranları vardır.

Biroyulu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

hiperboloidini nəzərdən keçirək. (1) tənliyini

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

və yaxud

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənliyin hər tərəfini ixtiyari λ ədədinə $\lambda \neq 0$ vurmaqla

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right)\end{aligned}\tag{2}$$

xətti tənliklər sistemini tərtib etmək olar. λ -nın müəyyən qiymətində (2) tənlikləri düz xətt təyin edir. (2) tənliklərinin hər biri müstəvi təyin edir. Ona görə də 1 düz xətti (2) müstəvilərinin kəsişmə xətti kimi təyin olunur. λ ədədinə müxtəlif qiymətlər verməklə düz xətlər ailəsini təyin edirik.

(2) tənliklərini tərəf-tərəfə vurduqda (1) tənliyi alındığından koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər hansı (x, y, z) nöqtəsi (1) tənliyi ilə təyin olunan biroyuqlu hiperboloid üzərində yerləşər. Deməli, ailənin düz xətlərindən hər biri biroyuqlu hiperboloid üzərində yerləşər.

Biroyuqlu hiperboloid səthi üzərində baxdığımızdan fərqli olan daha bir düzxətli doğuranlar ailəsinin yerləşdiyini göstərmək olar. Bu düz xətlər

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= k \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

tənlikləri ilə təyin edilir. Bu tənliklərdə k ədədinə müxtəlif qiymətlər verməklə düz xətlər təyin edirik. Beləliklə, biroyuqlu hiperboloidin hər bir nöqtəsindən bu ailələrdən hər birinin bir düz xətti keçir. Biroyuqlu hiperboloidin düzxətli doğuranlarının aşağıdakı xassələri vardır.

1. Biroyuqlu hiperboloidin hər bir nöqtəsindən müxtəlif ailələrə mənsub olan iki düzxətli doğuran keçir.

2. Eyni ailəyə mənsub doğuranlar çarpaz olur.

3. Müxtəlif ailəyə mənsub iki düzxətli doğuran bir müstəvi üzərində yerləşir.

Yuxarıda göstərilən mühakimələrə əsasən

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4)$$

hiperbolik paraboloid səthi üzərində düzxətli doğuranların iki ailəsinin yerləşdiyinə inanmaq olar. Bu doğuranların tənlikləri uyğun olaraq

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2kz \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{k} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

və

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{m} \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2mz \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

şəklində təyin olunurlar. Burada k və m müxtəlif parametrlərdir.

Qeyd edək ki, biroyuqlu hiperboloidin düzxətli doğuranlarının xassələrindən inşaat texnikasında (dər ağaclarının qurulması, qüllələrin və dayaqların tikilməsində) istifadə edilir.

I FƏSLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR:

Koordinatlar metodu

№1 Verilən nöqtələrə koodinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan nöqtələrin koordinatlarını tapmalı:

- 1) $A(3;3)$ 2) $B(2;-4)$ 3) $C(-2;1)$ 4) $D(5;-3)$ 5) $E(-5;4)$ 6) $F(a;b)$

Həlli: Koodinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olan nöqtələri tapmaq üçün nöqtənin həm absisinin, həm də ordinatının işarəsini dəyişmək lazımdır.

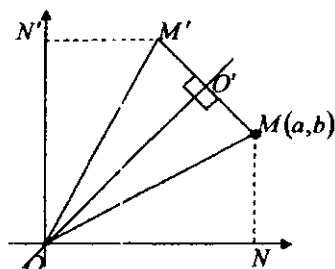
Ona görə də

- 1) $A'(-3;-3)$ 2) $B'(-2;4)$ 3) $C'(2;-1)$ 4) $D'(-5;3)$ 5) $E'(5;-4)$ 6) $F'(-a;-b)$

№2 Birinci koordinat bucağının tənböləninə nəzərən verilən nöqtələrə simmetrik olan nöqtələrin koordinatlarını tapın:

- 1) $A(3;5)$ 2) $B(5;-2)$ 3) $C(-3;4)$

Həlli: Tutaq ki, $M(a,b)$ nöqtəsinin birinci koordinat bucağının tənböləninə nəzərən simmetrik nöqtəsi $M'(x,y)$. OMM üçbucağına baxaq.



OO' həm hündürlük, həm də mediandır, $OM' = OM$. Onda $\triangle ON'M' = \triangle ONM$ olduğundan $ON = ON' = a$, $NM = N'M' = b$ olar. Deməli, M nöqtəsinə simmetrik nöqtə $M'(b; a)$ nöqtəsidir. Ona görə də verilən nöqtələrə simmetrik nöqtələr

- 1) $A'(5; 3)$ 2) $B'(-2; 5)$ 3) $C'(4; -3)$

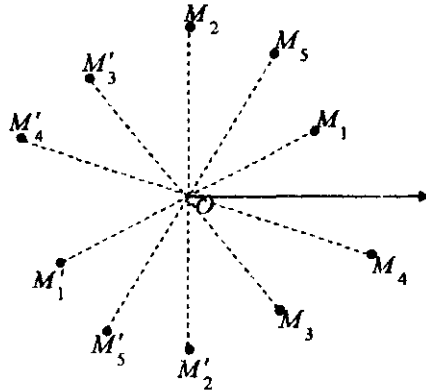
olar.

№3 Polyar koodinat sistemində verilmiş nöqtələrə polyusa nəzərən simmetrik olan nöqtələrin polyar koordinatlarını tapmalı:

$$M_1\left(1; \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(5; \frac{\pi}{2}\right), M_3\left(2; -\frac{\pi}{3}\right), M_4\left(4; \frac{5\pi}{6}\right) \text{ və } M_5(3, -2)$$

Həlli:

Simmetrik nöqtələrin koordinatları aşağıdakı kimi olacaq.



$$M'_1\left(1; -\frac{3\pi}{4}\right), M'_2\left(5; -\frac{\pi}{2}\right), M'_3\left(2; \frac{2\pi}{3}\right), M'_4\left(4; -\frac{\pi}{6}\right), M'_5(3; \pi - 2)$$

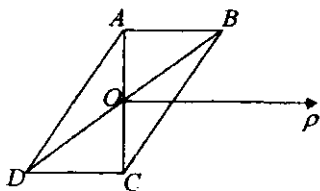
№4 Polyar koodinat sistemində $ABCD$ paraleloqramının iki $A\left(3; \frac{4\pi}{9}\right)$ və

$B\left(5; \frac{3\pi}{14}\right)$ təpə nöqtəsinin koordinatı verilmişdir və diaqonallarının kəsişmə

nöqtəsi polyus ilə üst-üstə düşür. Paraleloqramın qalan iki təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapmalı:

Həlli: Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi paraleloqramın simmetriya mərkəzidir.

Qalan iki təpələri polyusa nəzərən simmetrik nöqtələr olacaq. C təpəsi A təpəsinin polyusa nəzərən simmetrik nöqtəsidir, D təpəsi B təpəsinin polyusa nəzərən simmetrik nöqtəsidir.



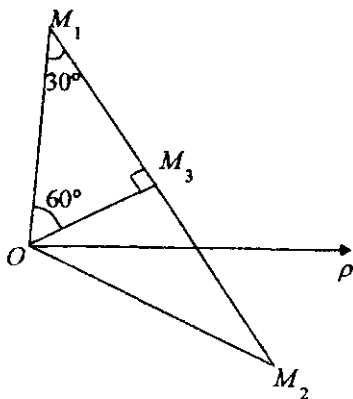
$$C\left(3; -\frac{5\pi}{9}\right), D\left(5; -\frac{11\pi}{14}\right)$$

N5 Polyar koodinat sistemində $M_1\left(12; \frac{4\pi}{9}\right)$ və $M_2\left(12; -\frac{2\pi}{9}\right)$ nöqtələri verilmişdir. M_1 və M_2 nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsinin koordinatlarını tapın:

Həlli: OM_1 və OM_2 parçaları arasında qalan bucaq:

$$\frac{4\pi}{9} - \left(-\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{9} = \frac{6\pi}{9} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\angle M_1OM_2 = 120^\circ$$



Bərabəryanlı OM_1M_2 üçbucağında OM_3 həm median, həm tənbölən, həm də hündürlükdür. Ona görə də $\angle OM_1M_3 = 30^\circ$ olar. Onda $OM_3 = \frac{OM_1}{2} = 6$ olmalıdır.

Əgər $M_3(\rho, \theta)$ kimi işarə etsək, $\rho = 6$ olar. İndi isə θ bucağını hesablayaq:

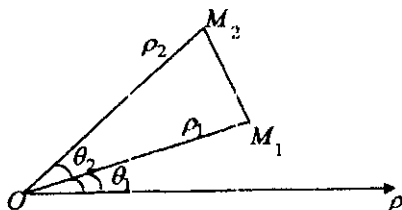
$$\theta = \frac{4\pi}{9} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi - 3\pi}{9} = \frac{\pi}{9};$$

Deməli $M_3\left(6; \frac{\pi}{9}\right)$ olur.

N6 Polyar koodinat sistemində $M_1(\rho_1; \theta_1)$ və $M_2(\rho_2; \theta_2)$ nöqtələri verilmişdir.

Bunlar arasındakı d məsafəsini hesablayın.

Həlli: $\triangle OM_1M_2$ baxaq. Burada $|OM_1| = \rho_1$, $|OM_2| = \rho_2$ götürsək, $\angle M_1OM_2 = \theta_2 - \theta_1$ olar.



Kosinuslar teoreminə görə

$$|M_1M_2|^2 = |OM_1|^2 + |OM_2|^2 - 2|OM_1| \cdot |OM_2| \cdot \cos \angle M_1OM_2 \text{ və yaxud}$$

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} \text{ olar.}$$

№7 Polyar koodinat sisteminin polyusu düzbucaqlı dekart koodinat sisteminin koodinat başlanğıcı ilə, polyar ox isə absis oxunun müsbət istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Polyar koodinat sisteminde $M_1\left(6; \frac{\pi}{2}\right), M_2(5;0), M_3\left(2; \frac{\pi}{4}\right), M_4\left(10; -\frac{\pi}{3}\right), M_5\left(8; \frac{2\pi}{3}\right), M_6\left(12; -\frac{\pi}{6}\right)$ nöqtələri verilir. Bu nöqtələrin dekart koodinatlarını tapın.

Həlli: $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ olduğundan

$$1. M_1\left(6; \frac{\pi}{2}\right): x = 6 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0, y = 6 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 6$$

$$M_1(0;6)$$

$$2. M_2(5;0): x = 5 \cdot \cos 0 = 5, y = 5 \cdot \sin 0 = 0$$

$$M_2(5;0)$$

$$3. M_3\left(2; \frac{\pi}{4}\right): x = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, y = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$M_3(\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$4. M_4\left(10; -\frac{\pi}{3}\right):$$

$$x = 10 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5, y = 10 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 10 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\sqrt{3}$$

$$M_4(5; -5\sqrt{3})$$

$$M_4(5; -5\sqrt{3})$$

$$5. M_5\left(8; \frac{2\pi}{3}\right): x = 8 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -4, \quad y = 8 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$M_5(-4; 4\sqrt{3})$$

$$6. M_6\left(12; -\frac{\pi}{6}\right):$$

$$x = 12 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}, \quad y = 12 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -12 \cdot \frac{1}{2} = -6$$

$$M_6(6\sqrt{3}; -6)$$

№8 Parçanın *d* uzunluğunu və θ polyar bucağını bilərək, koordinat oxları üzərində proyeksiyalarını hesablayın:

$$1) d = 12; \quad \theta = \frac{2\pi}{3}; \quad 2) d = 6; \quad \theta = -\frac{\pi}{6}; \quad 3) d = 2; \quad \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Həlli: Parçanın koordinat oxlarına proyeksiyaları

$X = d \cdot \cos \theta$; $Y = d \cdot \sin \theta$ düsturları ilə hesablanır. Ona görə də

$$1) X = 12 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6; \quad Y = 12 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$2) X = 6 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}; \quad Y = 6 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$3) X = 2 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \quad Y = 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

№9 Parçanın koordinat oxları üzərində proyeksiyaları verilir:

$$1) X=1; Y=\sqrt{3} \quad 2) X=3\sqrt{2}; Y=-3\sqrt{2} \quad 3) X=-2\sqrt{3}; Y=2$$

Parçanın d uzunluğunu və θ polyar bucağını tapmalı:

Həlli: $d = \sqrt{X^2 + Y^2}; \cos \theta = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}; \sin \theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$

düsturlarından istifadə edərək,

$$1) d = \sqrt{1+3} = 2; \cos \theta = \frac{1}{2}; \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$2) d = \sqrt{18+18} = \sqrt{36}; \cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \theta = -\frac{3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\pi < \theta < \pi$ olduğu üçün

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$3) d = \sqrt{12+4} = 4; \cos \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

№10 Kvadratin iki qarşı təpə nöqtəsi $P(1;5)$ və $Q(1;-3)$ verilir. Onun sahəsini tapın.

Həlli: PQ kvadratin diaqonalıdır. Onun uzunluğunu tapaq:

$$|PQ| = \sqrt{(3-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}. \text{ Onda kvadratin tərəfinin}$$

$$\text{uzunluğu } a = \frac{|PQ|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \sqrt{34} \text{ olar. Kavadratın sahəsi isə } S = a^2 = 34$$

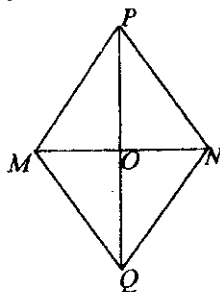
olar.

№11 Rombun tərəfi $5\sqrt{2}$ və iki qarşı təpəsi $P(3,-4)$ və $Q(1,2)$ nöqtələridir.

Rombun hündürlüyünün uzunluğunu tapın.

Həlli: PQ diaqonalının uzunluğunu tapaq:

$$|PQ| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



$\triangle MPO$

üçbucağına

baxaq.

$$|PO| = \sqrt{10}|MP| = 5\sqrt{2};$$

$$|MO| = \sqrt{50-10} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ olduğundan rombun sahəsi } S = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |MN|$$

yaxud $S = \frac{1}{2}|MP| \cdot h$ (h -hündürlükdür) olar. Qiymətləri son düsturda

yazsaq:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot h$$

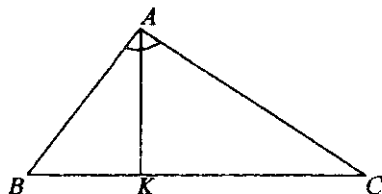
$$5\sqrt{2} \cdot h = 40$$

$$h = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Rombun hündürlüyünün uzunluğunun $4\sqrt{2}$ -yə bərabər olduğunu təyin edirik.

№12 $A(-\sqrt{3};1)$, $B(0;2)$ və $C(-2\sqrt{3};2)$ üçbucağın təpə nöqtələridir. Onun təpəsindəki xarici bucağını tapın.

Həlli: Əvvəlcə A təpəsindəki daxili bucağı tapaq. Üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarını hesablayaq:



$$|BC| = \sqrt{12 + 0} = 2\sqrt{3}$$

$$|AB| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$|AC| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Bu, bərabəryanlı üçbucaqdır, BC tərəfinə endirilmiş median həm hündürlük, həm də tənböləndir. Onda $\triangle ABK$ -də $|AB| = 2$,

$|BK| = \sqrt{3}$ olduğundan $\sin \angle BAK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle BAK = 60^\circ$, $\angle BAC = 120^\circ$ olar. Onda

A təpəsinin xarici bucağı $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ -yə bərabərdir.

№13 $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ və $P(-2;2)$ nöqtələri üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrinin koordinatlarıdır. Onun təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Tutaq ki, A nöqtəsinin koordinatları $A(x,y)$ -dir. Onda B nöqtəsinin koordinatları $2 \cdot 2 - x = 4 - x$ olduğundan $2 \cdot (-1) - y = -2 - y$ $B(4 - x; -2 - y)$. C nöqtəsinin koordinatları isə $2 \cdot (-2) - x = -4 - x$, $2 \cdot 2 - y = 4 - y$ yaxud $C(-4 - x; 4 - y)$ olar.

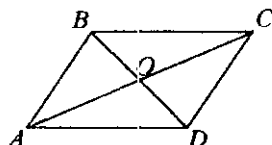
Ona görə də N nöqtəsinin BC tərəfinin orta nöqtəsi olduğundan aşağıdakı tənlikləri alırıq.

$$\begin{cases} \frac{4 - x - 4 - x}{2} = -1 \\ \frac{-2 - y + 4 - y}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = -2 \\ -2y + 2 = 8 \end{cases}$$

Buradan $x=1$, $y=-3$ alınır. Deməli, $A(1;-3)$, $B(3;1)$, $C(-5;7)$ olmalıdır.

№14 Paraleloqramın üç təpəsinin $A(3;5)$, $B(5;-3)$ və $C(-1;3)$ koordinatları verilmişdir. B təpəsi ilə qarşılıqlı olan dördüncü D təpəsinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Diaqonallar $O(x, y)$ kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünürlər, onun koordinatlarını tapaq.



Bu nöqtə AC diaqonalının orta nöqtəsi olduğundan

$$x = \frac{3-1}{2} = 1, \quad y = \frac{-5+3}{2} = -1 \quad \text{və} \quad O(1, -1) \text{ Onda } D \text{ təpəsinin koordinatları}$$

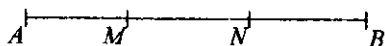
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{olduğundan} \quad 2 \cdot 1 - 5 = -3 \quad \text{və} \quad 2 \cdot (-1) + 3 = 1 \quad D(-3; 1)$$

olar.

№15 $A(1; -3)$ və $B(4; 3)$ nöqtələri ilə məhdud olan parça üç bərabər hissəyə bölünmüşdür. Bölünmə nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Bölünmə nöqtələrini $M(x_1; y_1)$ və $N(x_2; y_2)$ kimi işarə edək. Onda $\frac{|AN|}{|NB|} = 2$

$$\text{olduğundan} \quad x_2 = \frac{1+2 \cdot 4}{1+2} = \frac{9}{3} = 3; \quad y_2 = \frac{-3+2 \cdot 3}{1+2} = 1 \quad N(3; 1) \text{ olar.}$$

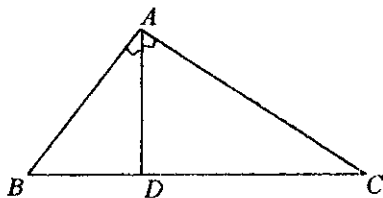


M nöqtəsi AN parçasının orta nöqtəsi olduğundan $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$;

$$y_1 = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad M(2; -1) \text{ olar.}$$

№16 Üçbucağın təpə nöqtələrinin $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$ və $C(-1; -2)$ koordinatları verilmişdir. A təpəsindəki daxili bucağın tənbölənin uzunluğunu tapın.

Həlli: Verilmiş üçbucaqda AD tənbölən olduğundan $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$ olar.



Tərəflərin uzunluğunu hesablayaq:

$$|AB| = \sqrt{36 + 64} = 10, \quad |AC| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Deməli $\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = 2$ olur. $D(x, y)$ işarə edək. Onda

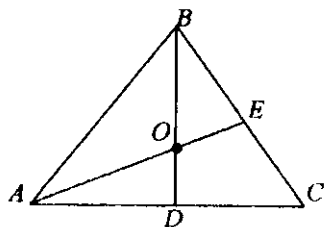
$$x = \frac{-3 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{3 + 2 \cdot (-2)}{1 + 2} = -\frac{1}{3} \quad D\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right) \text{ olar. Ona görə də}$$

$$|AD| = \sqrt{\left(3 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-5 + \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{9} + \frac{196}{9}} = \frac{14\sqrt{2}}{3}$$

alınır.

N:17 Üçbucaq şəklində bircinsli lövhənin təpə nöqtələrinin $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ və $C(x_3; y_3)$ koordinatları verilir. Onun ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Üçbucağın ağırlıq mərkəzi medianların kəsişmə nöqtəsidir. Medianların kəsişmə nöqtəsi O nöqtəsi olsun.



D nöqtəsinin koordinatları $D\left(\frac{x_1 + x_3}{2}; \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$ olar. Medianların kəsişmə

nöqtəsi onları (təpə nöqtəsindən hesablamla) 2:1 nisbətində bölür. Ona görə də

$$\frac{|BO|}{|OD|} = 2. \quad \text{Onda} \quad x = \frac{x_2 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_3}{2}}{1 + 2}, \quad y = \frac{y_2 + 2 \cdot \frac{y_1 + y_3}{2}}{1 + 2} \text{ olar. Burada}$$

$$O\left(\frac{x_2 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_3}{2}}{1 + 2}; \frac{y_2 + 2 \cdot \frac{y_1 + y_3}{2}}{1 + 2}\right) \text{ yaxud } O\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \text{ alınır.}$$

№18 İkinci koordinat bucağının tənböləlinə nəzərən nöqtələrə simmetrik olan nöqtələrin koordinatlarını tapın:

- 1) $A(3;5)$ 2) $B(-4;3)$ 3) $C(7;-2)$

Cavab: 1) $(-5;-3)$ 2) $(-3;4)$ 3) $C(2;-7)$

№19 $M(x, y)$ nöqtəsinin hansı rübdə yerləşdiyini göstərin:

- 1) $xy > 0$ 2) $xy < 0$ 3) $x - y = 0$ 4) $x + y = 0$ 5) $x + y < 0$ 6) $x - y < 0$

Cavab: 1) birinci və üçüncü 2) ikinci və dördüncü 3) birinci, ikinci və dördüncü
4) ikinci və üçüncü 5) ikinci, üçüncü və dördüncü 6) birinci, ikinci və üçüncü

№20 Polyar koordinat sistemində verilmiş aşağıdakı nöqtələrə polyar oxla nəzərən simmetrik olan nöqtələrin polyar koordinatlarını tapın.

$$M_1\left(3; \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(2; -\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(3; -\frac{\pi}{3}\right), M_4(1; 2) \text{ və } M_5(5; -1)$$

Cavab: $\left(3; -\frac{\pi}{4}\right), \left(2; \frac{\pi}{2}\right), \left(3; \frac{\pi}{3}\right), (1; -2), (5; 1)$

№21 Polyar koordinat sistemində $A\left(8; -\frac{2\pi}{3}\right)$ və $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$ nöqtələri verilir. A və

B nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsinin polyar koordinatlarını tapmalı.

Cavab: $\left(1; -\frac{2\pi}{3}\right)$

№22 Polyar koordinat sistemində kvadratin iki qarşı təpəsi verilmişdir.

$$P\left(6; -\frac{7\pi}{12}\right) \text{ və } Q\left(4; \frac{\pi}{6}\right). \text{ Onun sahəsini tapın.}$$

Cavab: $2(13 + 6\sqrt{2})$ kv. vahidi

№23 $\triangle OAB$ üçbucağının təpələrindən biri polyusda, qalan ikisi isə $A(\rho_1, \theta_1)$ və $B(\rho_2, \theta_2)$ nöqtələrində yerləşir. Bu üçbucağın sahəsini hesablayın.

Cavab: $S = \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 [\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

№24 Polyar koordinat sisteminin polyusu düzbucaqlı dekart koordinat sisteminin koordinat başlanğıcı ilə, polyar ox isə absis oxunun müsbət yarımoxu ilə üst-üstə düşür. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemində $M_1(0;5)$; $M_2(-3;0)$; $M_3(\sqrt{3};1)$; $M_4(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $M_5(1;-\sqrt{3})$ nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrin polyar koordinatlarını tapın.

Cavab: $M_1\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$; $M_2(3; \pi)$; $M_3\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$; $M_4\left(2; -\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_5\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$

№25 İki təpə nöqtəsi $A(-3;2)$ və $B(1;6)$ olan düzgün üçbucağın sahəsini tapın.

Cavab: $8\sqrt{3}$ kv. vahid.

№26 Rombun tərəfi $5\sqrt{10}$, iki qarşı təpəsi $P(4;9)$ və $Q(-2;1)$ nöqtələridir.

Rombun sahəsini tapın.

Cavab: 150 kv. vahidi

№27 Təpə nöqtələri $A_1(1;1)$, $A_2(2;3)$ və $A_3(5;-1)$ olan üçbucağın düzbucaqlı üçbucaq olduğunu isbat edin.

№28 $A(3;-1)$ və $B(2;1)$ nöqtələri verilir.

1) B nöqtəsinə nəzərən A nöqtəsi ilə simmetrik olan M nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

2) A nöqtəsinə nəzərən B nöqtəsi ilə simmetrik olan N nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Cavab: 1) $M(1;3)$; 2) $N(4;-3)$

№29 $P(2;2)$ və $Q(1;5)$ nöqtələri ilə üç bərabər hissəyə bölünmüş parçanın A və B uc nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

Cavab: $A(3;-1)$, $B(0;8)$

№30 Üçbucağın medianlarının M kəsişmə nöqtəsi absis oxu üzərində, iki $A(2;-3)$ və $B(-5;1)$ təpə nöqtəsi verilir və C təpə nöqtəsi ordinat oxu üzərində yerləşir. M və C nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

Cavab: $M(-1;0)$, $C(0;2)$

№31 Üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrinin (x_1, y_1) , (x_2, y_2) və (x_3, y_3)

koordinatları verildikdə, təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

Cavab: $A(x_1 - x_2 + x_3; y_1 - y_2 + y_3)$, $B(x_3 - x_1 + x_2; y_3 - y_1 + y_2)$

$C(x_2 - x_3 + x_1; y_2 - y_3 + y_1)$

№32 Üçbucağın təpə nöqtələri verilib: $A(7;2)$; $B(1;9)$; $C(-8;-11)$. Üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsindən təpə nöqtələrinə qədər olan məsafələri tapın.

Cavab: $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$

№33 $L(0;0)$, $M(3;0)$, $N(0;4)$ nöqtələri üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələridir.

Üçbucağın sahəsini tapın.

Cavab: 24 kv. vahid

№34 $A(2;3;1)$, $B(5;-3;2)$, $C(-3;2;-1)$ və $D(a;b;c)$ nöqtələri ilə 1) Oxy müstəvisinə

2) Oxz müstəvisinə 3) Oyz müstəvisinə 4) absis oxuna 5) ordinat oxuna 6)

aplikat oxuna 7) Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik nöqtələrin

koordinatlarını tapın.

Cavab: 1) $(2;3;-1)$, $(5;-3;-2)$; $(-3;2;1)$, $(a;b;-c)$

2) $(2;-3;1)$; $(5;3;2)$; $(-3;-2;-1)$; $(a;-b;c)$

3) $(-2;3;1)$; $(-5;-3;2)$; $(3;2;-1)$; $(-a;b;c)$

$$4) (2; -3; -1); (5; 3; -2); (-3; -2; 1); (a; -b; -c)$$

$$5) (-2; 3; -1); (-5; -3; -2); (3; 2; 1); (-a; b; -c)$$

$$6) (-2; -3; 1); (-5; 3; 2); (3; -2; -1); (-a; -b; c)$$

$$7) (-2; -3; -1); (-5; 3; -2); (3; -2; 1); (-a; -b; -c)$$

№35 Kubun dörd təpəsi verilir: $A(-a; -a; -a)$, $B(a; -a; -a)$, $C(-a; a; -a)$, $D(a; a; a)$.

Onun qalan təpə nöqtələrini tapın.

Cavab: $(a; a; -a)$, $(a; -a; a)$, $(-a; a; a)$, $(-a; -a; a)$

№36 1) $xy > 0$; 2) $xz < 0$; 3) $yz > 0$; 4) $xyz > 0$; 5) $xyz < 0$ olduqda nöqtə hansı oktantda yerləşə bilər?

Cavab: 1) Birinci, üçüncü, beşinci və yeddinci; 2) İkinci, üçüncü, beşinci və səkkizinci;

3) Birinci, ikinci, yeddinci və səkkizinci; 4) Birinci, üçüncü, altıncı və səkkizinci;

5) İkinci, dördüncü, beşinci və yeddinci;

№37 Radiusu $R=3$ olan küre bütün koordinat müstəvilərinə toxunur və 1) ikinci oktantda 2) beşinci oktantda 3) altıncı oktantda 4) yeddinci oktantda 5) səkkizinci oktantda yerləşir. Kürenin mərkəzini tapın.

Cavab: 1) $(-3; 3; 3)$; 2) $(3; 3; -3)$; 3) $(-3; 3; -3)$; 4) $(-3; -3; -3)$; 5) $(3; -3; -3)$

№38 İsbat edin ki, $M(3;-2;5)$, $N(-2;1;-3)$, $P(5;1;-1)$ üçbucağının daxili bucaqları iti bucaqlardır.

№39 Ordinat oxu üzərində $A(1;-3;7)$ və $B(5;7;-5)$ nöqtələrindən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtəni tapın.

Cavab: $(0;2;0)$

№40 $P(4;-1;-1)$ nöqtəsindən keçən və bütün koordinat müstəvilərinə toxunan kürə səthinin C mərkəzini və R radiusunu tapın.

Cavab: $C(3;-3;-3)$, $R=3$

№41 Üçbucağın $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ və $C(-4;7;5)$ təpə nöqtələri verilir. Onun B təpəsi daxili bucağının tənböləninin uzunluğunu hesablayın.

Cavab: $\frac{2}{3}\sqrt{74}$

II FƏSLƏ AİD MİSALLAR

Vektorlar

№1 $\vec{a} = \{12; -15; -16\}$ vektorunun yönəldici kosinuslarını hesablayın.

Həlli: $\cos \alpha = \frac{X}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{Y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}$ olduğu məlumdur. Ona görə də

$$|\vec{a}| = \sqrt{144 + 225 + 256} = \sqrt{625} = 25$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{25}, \cos \beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}, \cos \gamma = -\frac{16}{25} \text{ alınır.}$$

№2 Vektor koordinat oxları ilə

1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ bucaq əmələ gətirə bilirmi?

Həlli: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ olduğundan

$$1) \cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 120^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{əmələ gətirə bilər.}$$

$$2) \cos^2 45^\circ + \cos^2 135^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} \quad \text{əmələ gətirə bilməz.}$$

№3 M nöqtəsinin radius-vektoru koordinat oxları ilə eyni bucaqlar əmələ gətirirsə və onun modulu 3-ə bərabərdirsə, koordinatlarını tapın.

Həlli: M nöqtəsinin koordinatlarını $M(x, y, z)$ ilə işarə etsək, onda $\vec{r}_M = \{x, y, z\}$.

$\alpha = \beta = \gamma$ olduğundan və $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ bərabərliyindən

$3 \cos^2 \alpha = 1$ və $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ alınır. Onda $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ olur.

$x = |\vec{r}_M| \cdot \cos \alpha$, $y = |\vec{r}_M| \cdot \cos \beta$, $z = |\vec{r}_M| \cdot \cos \gamma$. Onda

$$x = 3 \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \pm \sqrt{3};$$

$$y = \pm \sqrt{3};$$

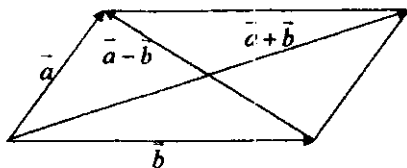
$$z = \pm \sqrt{3}.$$

Deməli, $M(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ və $M(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ olur.

№4 $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\varphi = 60^\circ$ -li bucaq əmələ gətirir və $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$ olarsa,

$|\vec{a} + \vec{b}|$ və $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ni təyin edin.

Həlli: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını bir başlanğıca köçürək və onlar üzərində paraleloqram quraq.



Bu paraleloqramın böyük diaqonalı ilə $\vec{a} + \vec{b}$ vektoru, kiçik diaqonalı ilə isə $\vec{a} - \vec{b}$ vektoru üst-üstə düşür. Onda kosinuslar teoreminə görə

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 120^\circ$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 25 + 64 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 129$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ$$

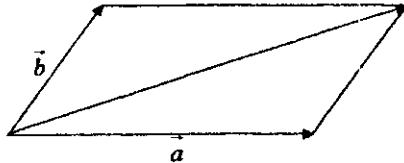
$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

alınır.

N5 $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları hansı şərti ödəməlidir ki, $\vec{a} + \vec{b}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağı yarıya bölsün.

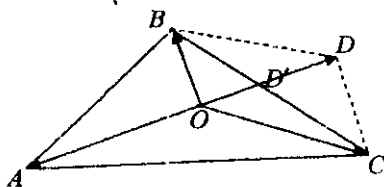
Həlli: Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını bir başlanğıca gətirsək, $\vec{a} + \vec{b}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının ortaq başlanğıcdan çıxan diaqonalı ilə üst-üstə düşür.



Əgər paraleloqramın diaqonalı onun daxili bucağını yarıya bölürsə, bu paraleloqram rombdur. Deməli, $\vec{a} + \vec{b}$ vektorunun $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağı yarıya bölməsi üçün $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ olmalıdır.

№6 O nöqtəsi ABC üçbucağının ağırlıq mərkəzidir. İsbat edin ki,
 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$

İsbatı: Üçbucağının ağırlıq mərkəzi onun medianlarının kəsişmə nöqtəsidir.



$\vec{OB} + \vec{OC}$ vektorunu tapaq. $\vec{OB}$ və $\vec{OC}$ vektorları üzərində paraleloqram quraq. Onda alınan $OBDC$ paraleloqramının OD diaqonalı $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC}$ vektoru ilə üst-üstə düşür. D' nöqtəsi BC -ni yarıya bölən nöqtədirsə, onda AD' mediandır və $|AO| = 2|OD'|$. Paraleloqramın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onları yarıya bölür. Deməli, $|OD| = 2|OD'|$ və $|AO| = |OD|$. Lakin $\vec{OA}$ və $\vec{OD}$ vektorları əks istiqamətli olduqları üçün $|\vec{OA}| = |\vec{OD}|$.

$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$ və ya $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$. Buradan isə $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ və ya $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$ alırıq.

№7 α və β -nın hansı qiymətlərində $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ və $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlarının kollinear olduğunu təyin edin.

Həlli: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ olması üçün $-\frac{2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$ şərti ödənməlidir. Buradan $3\alpha = 12$ və $-6\beta = 6$ yaxud $\alpha = 4$, $\beta = -1$ alırıq.

№8 Dörd $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ nöqtələrinin trapesiyanın təpə nöqtələri olduğunu yoxlayın.

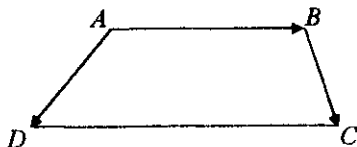
Həlli: Trapesiyanın iki qarşı tərəfi paralel olmalıdır, digər iki qarşı tərəfi isə paralel olmamalıdır. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ və $\overrightarrow{AD}$ vektorlarının koordinatlarını tapaq.

$$\overrightarrow{AB} = \{-2; 3; -3\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{-2; -1; -2\}$$

$$\overrightarrow{CD} = \{4; -6; 6\}$$

$$\overrightarrow{AD} = \{0; -4; 1\}$$



$\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ qarşı vektorlarının kollinear olub- olmadıqlarını yoxlayaq.

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Deməli $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$. Bu o deməkdir ki, $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{CD}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ və onlar əks istiqamətlidir. Deməli, $ABCD$ dördbucaqlının iki qarşı tərəfi $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ paraleldir. $\overrightarrow{BC}$ və $\overrightarrow{AD}$ vektorlarının koordinatları müənasib deyil. Deməli, $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ və dördbucaqlının CB və AD qarşı tərəfləri parallel deyil. Onda $ABCD$ trapesiyadır.

№9 $\vec{p} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{q} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{r} = \{2; 1; -3\}$ vektorları verilir. $\vec{c} = \{1; -6; 5\}$ vektorunun $\vec{p}$, $\vec{q}$ və $\vec{r}$ bazisi üzrə ayrılışını tapın.

Həlli: $\vec{c}$ vektorunun $\vec{p}$, $\vec{q}$ və $\vec{r}$ bazisi üzrə ayrılışını $\vec{c} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ şəklində yazmaq olar. Buradan $\{1; -6; 5\} = \alpha\{3; -2; 1\} + \beta\{-1; 1; -2\} + \gamma\{2; 1; -3\}$ yaxud

$$\{1; -6; 5\} = \{3\alpha - \beta + 2\gamma; -2\alpha + \beta + \gamma; \alpha - 2\beta - 3\gamma\}$$

alınır.

Onda

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -6 \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma = 5 \end{cases}$$

sistemi alırıq. Sistemi Kramer qaydası ilə həll edək.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 11 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -25 + 33 = 8$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -17 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -17 & -7 \end{vmatrix} = -35 + 51 = 16$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 11 \\ -2 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 44 = -24$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 12 = 8$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 2, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = -3, \quad \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = 1$$

Deməli $\vec{c}$ vektorunun $\vec{p}$, $\vec{q}$ və $\vec{r}$ vektorları üzrə ayrılışı

$$\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$$

olur.

№10 $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardır, $\vec{c}$ vektoru bunların hər biri

ilə $\frac{\pi}{3}$ bərabər bucaqlar əmələ gətirir. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$ olduğunu

bilərək hesablayın:

$$1) (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c}); \quad 2) (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$$

Həlli:

$$\begin{aligned}
 1) (\vec{3a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c}) &= 3\vec{ab} + 9\vec{ac} - 2\vec{b}^2 - 6\vec{bc} = \\
 &= 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ + 9|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ - 2|\vec{b}|^2 - 6|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = \\
 &= 0 + 9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 25 - 6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = -62
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) = \\
 &= \vec{a}^2 + 2\vec{ab} - 3\vec{ac} + 2\vec{ba} + 4\vec{b}^2 - 6\vec{bc} - 3\vec{ca} - 6\vec{cb} + 9\vec{c}^2 = \\
 &= |\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ + 4|\vec{b}|^2 - 12|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ + 9|\vec{c}|^2 = \\
 &= 9 - 6 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 25 - 12 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 54 = 373
 \end{aligned}$$

№11 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ şərtini ödəyən $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları verilir. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 4$

olduğunu bilərək $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca}$ ifadəsini hesablayın.

Həlli: Şərtə görə

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ olduğundan $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$ olur. Onda

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{ab} + 2\vec{ac} + 2\vec{bc} = \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc})
 \end{aligned}$$

yaxud

$$\begin{aligned}
 9 + 1 + 16 + 2(\vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc}) &= 0 \\
 2(\vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc}) &= -26 \\
 \vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc} &= -13
 \end{aligned}$$

olar.

№12 $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bucağı əmələ gətirir. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ olduğunu

bilərək $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ və $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorları arasındakı α bucağını hesablayın.

Həlli: İki vektorun skalyar hasilindən istifadə etsək,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 1 = 2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{6} + |\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{7}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{6} + |\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = 1$$

Onda

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

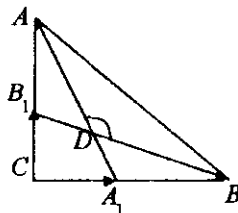
$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$$

olar.

№13 Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqda iti bucaq təpələrindən keçirilmiş medianların əmələ gətirdiyi bucağı hesablayın.

Həlli: Bərabəryanlı $\triangle ABC$ üçbucağına baxaq. Tutaq ki, $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Aydındır

ki, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ və $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ödənilir.



Onda AA_1 və BB_1 medianlarının kəsişmə nöqtəsi D olarsa, $\angle ADB = \varphi$ ilə

işarə etsək $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}|}$ olar. $\overrightarrow{A_1A}$ və $\overrightarrow{B_1B}$ vektorlarının $\vec{a}$ və $\vec{b}$

vektorları üzrə ayrılışını yazaq:

$$\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA_1}, \quad \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB_1}$$

$$\overrightarrow{CA_1} \parallel \overrightarrow{CB} \text{ və } |\overrightarrow{CA_1}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CB}| \text{ yaxud } \overrightarrow{CA_1} = \frac{1}{2} \vec{b};$$

$$\overrightarrow{CB_1} \parallel \overrightarrow{CA} \text{ və } |\overrightarrow{CB_1}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA}| \text{ yaxud } \overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{2} \vec{a} \text{ olar. Buradan}$$

$$\overrightarrow{A_1A} = \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}, \quad \overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$$

alınır. Üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsi onları (təpəsindən hesablayaraq) 2:1 nisbətində bölür, ona görə də

$$\overrightarrow{DB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{B_1B} = \frac{2}{3} \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right)$$

$$\overrightarrow{DA} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A_1A} = \frac{2}{3} \left(\vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

olar. Aydındır ki, $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}|}$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\frac{2}{3} \left(\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \right)}{\left| \frac{2}{3} \left(\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} \right) \right| \cdot \left| \frac{2}{3} \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \right) \right|} = \frac{\frac{4}{9} \left(\vec{a}\vec{b} - \frac{\vec{a}^2}{2} - \frac{\vec{b}^2}{2} + \frac{\vec{a}\vec{b}}{4} \right)}{\frac{4}{9} \left| \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \right| \cdot \left| \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} \right|} = \\ &= \frac{-\frac{\vec{a}^2}{2} - \frac{\vec{b}^2}{2}}{\frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}{2}} = -\frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}{\sqrt{\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2} \right)^2} \cdot \sqrt{\left(\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} \right)^2}} = -\frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}{2 \sqrt{\left(\vec{b}^2 - \vec{a}\vec{b} + \frac{\vec{a}^2}{4} \right) \left(\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \frac{\vec{b}^2}{4} \right)}} = \\ &= -\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}{2 \sqrt{\left(|\vec{b}|^2 + \frac{|\vec{a}|^2}{4} \right) \left(|\vec{a}|^2 + \frac{|\vec{b}|^2}{4} \right)}} = -\frac{2|\vec{a}|^2}{2 \sqrt{\frac{5}{4} |\vec{a}|^2 \cdot \frac{5}{4} |\vec{a}|^2}} = -\frac{|\vec{a}|^2}{\frac{5}{4} |\vec{a}|^2} = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Deməli $\varphi = \arccos -\frac{4}{5}$.

№14 Dördbucağının $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ və $D(-5; -5; 3)$ təpələri verilir.

İsbat edin ki, onun AC və BD diaqonalları qarşılıqlı perpendikulyardır.

Həlli: Şərtə görə $\overrightarrow{AC} = \{-5, 3, -1\}$, $\overrightarrow{BD} = \{-6, -9, 3\}$ olduğunu təyin edirik.

Dördbucaqlının diaqonalları $\overrightarrow{AC}$ və $\overrightarrow{BD}$ vektorları ilə üst-üstə düşür.

Əgər diaqonallar perpendikulyardırsa, onda $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ olmalıdır.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 30 - 27 - 3 = 0$$

Deməli, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, yəni diaqonallar qarşılıqlı perpendikulyardır.

№15 $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$ və $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$ vektorları verilir. Oz oxuna perpendikulyar olub

$\vec{x}\vec{a} = 9$, $\vec{x}\vec{b} = -4$ şərtlərini ödəyən $\vec{x}$ vektorunu təyin edin.

Həlli: $\vec{x} = \{x, y, z\}$ işarə edək. Onda

$$\vec{x}\vec{a} = 3x - y + 5z,$$

$$\vec{x}\vec{b} = x + 2y - 3z$$

yazmaq olar. $\vec{x}$ vektoru Oz oxuna perpendikulyar olduğundan $\vec{x}\vec{k} = 0$ və

ya $z = 0$ olur. Onda

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 9 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ z = 0 \end{cases}$$

sistemini alırıq. Sistemi həll etsək

$$\begin{cases} 3x - y = 9 \\ x + 2y = -4 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

alarıq. Deməli $\vec{x} = \{2; -3; 0\}$

№16 $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 4\}$ vektorları verilir. Hesablayın $pr_{\vec{b}-\vec{c}} \vec{a}$

Həlli: $pr_{\vec{b}-\vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|}$ bərabərliyindən və $\vec{b} + \vec{c} = \{2; -3; 6\}$

$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ olduqlarına görə

$$pr_{\vec{b}-\vec{c}} \vec{a} = \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot 6}{7} = \frac{35}{7} = 5 \text{ alınır.}$$

№17 Verilir $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ və $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ -ni hesablayın.

İki vektorun vektorial hasilinə görə $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$

olduğundan $\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{72}{3 \cdot 26} = \frac{12}{13}$ olar. Skalyar hasildən istifadə etsək

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \pm \frac{5}{13} \text{ olar. Onda}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 26 \cdot \frac{5}{13} = 30 \text{ və ya}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 26 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -30$$

alarıq.

Cavab: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm 30$.

№18 $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ bucağı əmələ gətirir. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ olduğunu

bilərək, hesablayın: $\left[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) \right]^2$; $\left[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) \right]^2$

Həlli:

$$\begin{aligned} \left[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) \right]^2 &= \left| (2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) \right|^2 = \left| 2\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b} \right|^2 = \\ &= \left| 3\vec{a} \times \vec{b} \right|^2 = \left(3 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 = 9 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) \right]^2 &= \left| (\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) \right|^2 = \left| 3\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b} \right|^2 = \\ &= \left| 10\vec{b} \times \vec{a} \right|^2 = 100 \left(|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2 = 100 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = 300 \end{aligned}$$

№19 $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ şərtini ödəyir. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ olduğunu

isbat edin.

İsbatı: Aydındır ki,

$$\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

Onda

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = 0 \\ \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} = 0 \\ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{c} = 0 \end{cases}$$

bərabərliklərindən

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = 0 \\ \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = 0 \\ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c} \\ \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{c} \times \vec{a} = -\vec{c} \times \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} \\ \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \\ \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} \end{cases}$$

Buradan $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ alırıq.

№20 $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ və $C(3;2;1)$ nöqtələri verilir. Vektorial hasilin koordinatlarını tapın.

$$1) \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}; \quad 2) (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$$

Həlli: Burada

$$\overrightarrow{AB} = \{-1; 3; -3\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{2; 0; 2\}$$

Onda

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k} \text{ yaxud}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \{6; -4; -6\} \text{ olar.}$$

$$2) \overrightarrow{CA} = \{-1; -3; 1\}, \overrightarrow{CB} = \{-2; 0; -2\} \text{ olduğundan}$$

$$\overline{BC} - 2\overline{CA} = \{2; 0; 2\} - \{-2; -6; 2\} = \{4; 6; 0\} \text{ olar.}$$

$$(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 8\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\text{yaxud } (\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB} = \{-12; 8; 12\} \text{ alınır.}$$

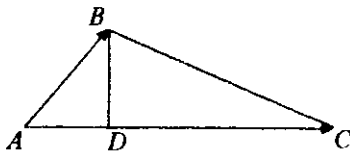
№21 Üçbucağın $A\{1; -1; 2\}$, $B\{5; -6; 2\}$, $C\{1; 3; -1\}$ təpə nöqtələri verilir.

B təpəsindən AC tərəfinə endirilmiş hündürlüyün uzunluğunu hesablayın.

Həlli: $|BD| = h$ işarə edək. $S_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$ bərabərliyindən $|BD| = \frac{2S_{ABC}}{|AC|}$ alınır.

Onda

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin \angle A.$$



Ona görə də

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| \text{ olar. Onda } h = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AC}|} \text{ bərabərliyindən}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{4; -5; 0\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{0; 4; -3\}$$

olduğuna görə və $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25$$

olduğundan $h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{25}{5} = 5$ vahid alınır.

№22 $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ və $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$ vektorlarına perpendikulyar olan və Oy oxu ilə kor bucaq əmələ gətirən $\vec{x}$ vektoru verilir. $|\vec{x}| = 26$ olduğunu bilərək, onun koordinatlarını tapın.

Həlli: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına perpendikulyar olan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorunun koordinatlarını hesablayaq.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(-6 + 3) - \vec{j}(12 - 0) + \vec{k}(4 - 0) = -3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

Onda $\vec{x} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$ olur. Kolleniarlıq şərtini yazsaq

$\vec{x} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = -3\lambda\vec{i} - 12\lambda\vec{j} + 4\lambda\vec{k}$ alırıq. Əgər $\vec{x}$ vektoru Oy oxu ilə kor bucaq əmələ gətirirsə, onda $\cos \beta < 0$ olar və $-12\lambda < 0$ olduğundan $\lambda > 0$ alınır.

Onda

$$|\vec{x}| = 26$$

$$\sqrt{9\lambda^2 + 144\lambda^2 + 16\lambda^2} = 26$$

$$|\lambda|\sqrt{169} = 26$$

$$\lambda \cdot 13 = 26$$

$$\lambda = 2$$

olur.

Deməli, $\vec{x} = \{-6; -24; 8\}$.

№23 $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ olduğunu isbat edin.

İsbatı:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) &= ((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}))(\vec{c} + \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ və $\vec{a}$ vektorları perpendikulyar olduğundan onların skalyar hasilı sıfıra bərabərdir. Ona görə də

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$$

bərabərliyi ödəyir. Onda son bərabərlikdən

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c} \text{ alınır.}$$

№24 İsbat edin ki, $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ və $D(2;1;3)$ nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşir.

İsbatı: Əgər A, B, C və D nöqtələri bir müstəvi üzərindədirsə, onda $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ vektorları da bir müstəvi üzərində yerləşirlər, yəni komplanardırlar və $(\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}) = 0$ olmalıdır.

Vektorların $\overline{AB} = \{1; -1; 6\}$, $\overline{AC} = \{-2; 0; 2\}$, $\overline{AD} = \{1; -1; 4\}$ koordinatlarını son bərabərlikdə nəzərə alsaq

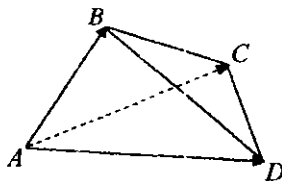
$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

alırıq. Deməli, $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ vektorları komplanardırlar və A, B, C, D nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşirlər.

№25 Tetraedrin həcmi $V=5$, onun üç təpəsi $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ və $C(2;-1;3)$ nöqtələrində yerləşir. Dördüncü D təpəsinin $Oyoxu$ üzərində olduğu məlum olarsa, koordinatlarını tapın.

Həlli: D təpəsinin koordinatları şərtə görə $D(0; y; 0)$ olar. Onda $ABCD$ tetraedrinin həcmi

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}| \text{ kimi təyin olunur.}$$



Şərtə görə

$$\overrightarrow{AB} = \{1; -1; 2\}$$

$$\overrightarrow{AC} = \{0; -2; 4\}$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-2; y-1; 1\}$$

yazmaq olar. Həcm düsturundan istifadə etsək

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & y-3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ y-3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 4(y-3) = 2 - 4y$$

bərabərliyini alırıq. Bunu nəzərə alsaq

$$\frac{1}{6}|2 - 4y| = 5$$

$$|2 - 4y| = 30$$

$$2 - 4y = 30 \quad \text{və ya} \quad 2 - 4y = -30 \quad \text{alırıq.}$$

$$y_1 = -7$$

$$y_2 = 8$$

Deməli $D_1(0; -7; 0)$, $D_2(0; 8; 0)$.

№26 Vektor iki koordinat oxu ilə

1) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$; 2) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ -li bucaq əmələ gətirə bilərmə?

Cavab: 1) ola bilməz; 2) ola bilər

№27 $\vec{a}$ vektoru Ox və Oy koordinat oxları ilə $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ -li bucaqlar əmələ gətirir. $|\vec{a}| = 2$ şərti daxilində onun koordinatlarını hesablayın.

Cavab: $\vec{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\}$ və ya $\vec{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}$

№28 $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardır və $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. $|\vec{a} + \vec{b}|$ və $|\vec{a} - \vec{b}|$ təyin edin.

Cavab: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$

№29 $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ və $D(5; -4; 2)$ nöqtələri verilir. $\vec{AB}$ və $\vec{CD}$ vektorlarının kollinear olduğunu yoxlayın; Bunlardan hansı uzundur və neçə dəfə; onlar necə yönəlmişdir - eyni istiqamətdə, yaxud əks istiqamətlərdə?

Cavab: $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$. $\vec{AB}$ vektoru $\vec{CD}$ vektorundan iki dəfə uzundur. Onlar bir tərəfə yönəlmişdir.

№30 Üç $\vec{a} = \{3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2\}$, $\vec{c} = \{-1; 7\}$ vektorları verilmişdir. $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorunun $\vec{a}$, $\vec{b}$ bazisi üzrə ayrılışını tapın.

Cavab: $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

№31 Dörd $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; 2; -1\}$ və $\vec{d} = \{3; 7; -7\}$ vektorları verilir. Bu dörd vektordan hər birinin ayrılışını, qalan üçünü bazis qəbul edərək tapın.

Cavab: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

№32 İsbat edin ki, $-\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \leq \vec{a}\vec{b} \leq \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$ burada hansı hallarda bərabərlik işarəsi ola bilər.

№33 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları bir-biri ilə cüt-cüt hər biri 60° -yə bərabər olan bucaqlar əmələ gətirir. $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ və $\left|\vec{c}\right| = 6$ olduğunu bilərək, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorunun modulunu hesablayın.

Cavab: $\left|\vec{p}\right| = 10$

№34 $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$, $\vec{b} = \{6; -3; 2\}$ vektorları verilmişdir. Hesablayın:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad 2) \sqrt{\vec{a}^2}; \quad 3) \sqrt{\vec{b}^2}; \quad 4) (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}); \quad 5) (\vec{a} + \vec{b})^2; \quad 6) (\vec{a} - \vec{b})^2$$

Cavab: 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) -200; 5) 129; 6) 41

№35 $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$ nöqtələri verilmişdir. Hesablayın:

$$1) (2\overline{AB} - \overline{CB}) \times (2\overline{BC} + \overline{BA}); 2) \sqrt{\overline{AB}^2};$$

$$3) \sqrt{\overline{AC}^2}; 4) (\overline{AB} \cdot \overline{AC})\overline{BC}; 5) \overline{AB}(\overline{AC} \cdot \overline{BC})$$

vektorlarının koordinatlarını tapın.

Cavab:

$$1) -524; 2) 13; 3) 3;$$

$$4) (\overline{AB} \cdot \overline{AC})\overline{BC} = \{-70; 70; -350\}; 5) \overline{AB}(\overline{AC} \cdot \overline{BC}) = \{-78; 104; -312\}$$

№36 Bir nöqtəyə tətbiq olunmuş üç $\overline{M} = \{3; -4; 2\}$, $\overline{N} = \{2; 3; -5\}$ və $\overline{P} = \{-3; -2; 4\}$ qüvvələri verilir. Bu qüvvələrin əvəzləyicisinin tətbiq nöqtəsi düz xətti hərəkət edərək $M_1(5; 3; -7)$ vəziyyətindən $M_2(4; -1; -4)$ vəziyyətinə yerini dəyişərsə, bu qüvvənin gördüyü işi tapın.

Cavab: 13

№37 İsbat edin ki, təpə nöqtələri $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$ və $D(4; 7; -2)$ olan dördbucaqlı kvadrattır.

№38 Paraleloqramın üç təpə nöqtəsi verilib. $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$ və $C(-3; 3; -3)$. Paraleloqramın AC və BD diaqonalları arasındakı ϕ bucağının kosinusunu hesablayın.

Cavab: $\frac{15}{7\sqrt{85}}$

№39 $\vec{x}$ vektorunun $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ və $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ vektorlarına perpendikulyar olduğunu və $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$ şərtini ödədiyini bilərək onu təyin edin.

Cavab: $\vec{x} = \{-3; 3; 3\}$

№40 Üç $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ və $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorları verilir.

Hesablayın:

$$pr_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$$

Cavab: -11

№41 $A(-2; 3; -4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; -1; 2)$, $D(3; 2; -4)$ nöqtələri verilib. Hesablayın:

$$pr_{\vec{CD}} \vec{AB}$$

Cavab: $-6\frac{5}{7}$

№42 Verilir. $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ və $\vec{a}\vec{b} = 12$. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ -ni hesablayın.

Cavab: 16

№43 İsbat edin ki, $(\vec{a} \times \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$

№44 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ və $\vec{d}$ vektorları $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$, $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ münasibəti ilə bağlıdır.

$\vec{a} - \vec{d}$ və $\vec{b} - \vec{c}$ vektorlarının kolleniar olduğunu isbat edin.

№45 $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ və $C(5;2;6)$ nöqtələri verilir. $\triangle ABC$ üçbucağının sahəsini tapın.

Cavab: 14 kv.vah

№46 $\vec{a}_1\{3;-1;2\}$, $\vec{a}_2\{1;2;-1\}$ vektorları verilib. Hesablayın:

$$1) \vec{a}_1 \times \vec{a}_2; \quad 2) (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_2; \quad 3) (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times (2\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

Cavab: $\{-3;5;7\}$, $\{-6;10;14\}$, $\{-12;20;28\}$

№47 Oz oxuna və $\vec{a} = \{8;-15;3\}$ vektoruna perpendikulyar olan $\vec{m}$ vektoru Ox oxu ilə iti bucaq əmələ gətirir. $|\vec{m}|=5$ olduğunu bilərək onun koordinatlarını tapın.

Cavab: $\vec{m} = \{45;24;0\}$

№48 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorları sağ üçlük əmələ gətirir və qarşılıqlı perpendikulyardır.

$$|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3 \text{ olduğunu bilərək } \vec{a}\vec{b}\vec{c} \text{ -ni hesablayın.}$$

Cavab: 24

№49 $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ olduğunu isbat edin. Burada λ və μ hər hansı bir ədəddir.

№50 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olub-olmadığını müəyyən edin:

$$1) \vec{a} = \{2; 3; -1\}, \vec{b} = \{1; -1; 3\}, \vec{c} = \{1; 9; -11\}$$

$$2) \vec{a} = \{3; -2; 1\}, \vec{b} = \{2; 1; 2\}, \vec{c} = \{3; -1; -2\}$$

$$3) \vec{a} = \{2; -1; 2\}, \vec{b} = \{1; 2; -3\}, \vec{c} = \{3; -4; 7\}$$

Cavab: 1) komplanardır 2) komplanar deyil 3) komplanardır.

№51 Tetraedrin təpələri verilir: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ və $D(-5; -4; 8)$.

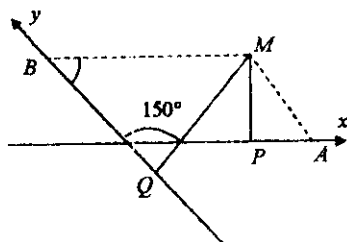
D təpəsindən endirilmiş hündürlüyün uzunluğunu tapın.

Cavab: 11

III FƏSLƏ AİD MİSALLAR AFİN KOORDİNAT SİSTEMİ

№1 Koordinat bucağı $\omega = 150^\circ$ olan çəpbucaqlı koordinat sistemində $M(6,4)$ nöqtəsi verilmişdir. Bu nöqtənin koordinat oxlarından olan məsafələrini hesablamalı.

Həlli: M nöqtəsini həmin koordinat sistemində təsvir edək.



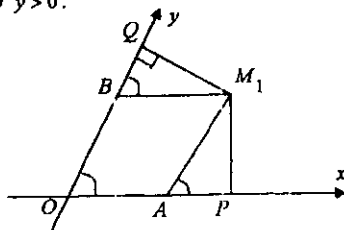
Axtarılan məsafələri $d_1 = MP$ və $d_2 = MQ$ ilə işarə edək. Onda $\triangle MAP$ baxaq. Burada

$\angle MAP = \pi - \omega = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Onda $d_1 = AM \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ -yə. $\triangle QMB$ -na baxsaq

$\angle MBQ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ olduğundan $d_2 = MB \sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ olar.

№2 Koordinat oxlarından məsafələri uyğun olaraq 1 və 1,5-ə bərabər olan M nöqtəsinin koordinatlarını tapmalı. Koordinat bucağı $\omega = \frac{\pi}{6}$.

Həlli: 1. Tutaq ki, $x > 0$ və $y > 0$.



Onda

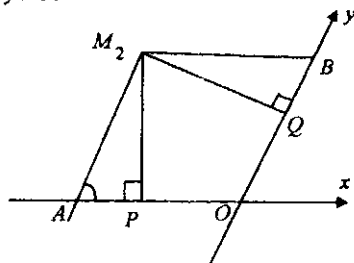
ΔM_1AP üçbucağında $M_1P=1$, $\angle M_1AP = \frac{\pi}{6}$ olduğu üçün

$$M_1A = \frac{M_1P}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ olar. Deməli, } y = 2.$$

ΔM_1BQ üçbucağından isə $M_1Q=1,5$, $\angle M_1BQ = \frac{\pi}{6}$ olar. Deməli,

$$M_1B = \frac{M_1Q}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1,5}{0,5} = 3. \quad x = 3 \text{ olar. Deməli, } M_1(3;2) \text{ olur.}$$

2. Tutaq ki, $x < 0$, $y > 0$.



Onda ΔM_2AP -yə baxaq: $M_2P=1$, $\angle M_2AP = \frac{\pi}{6}$.

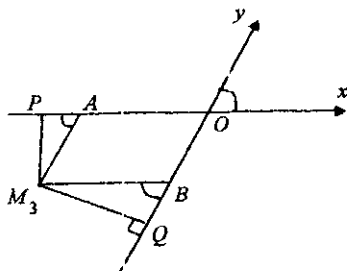
$$M_2A = \frac{M_2P}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{0,5} = 2$$

ΔM_2QB üçbucağından $M_2B=1,5$ onda

$$M_2Q = \frac{M_2B}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

Deməli, $y = 2$, $x = -3$. $M_2(-3;2)$ olar.

3. Əgər $x < 0$ və $y < 0$ olarsa, ΔM_3AP -na baxaq.



$M_3P = 1$, $\angle M_3AP = \frac{\pi}{6}$. Onda

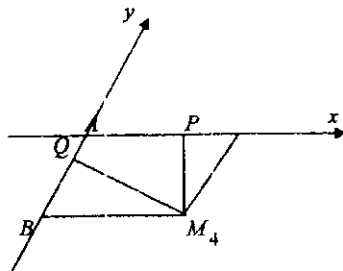
$$M_3A = \frac{M_3P}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{0,5} = 2$$

ΔM_3QB üçbucağından $M_3Q = 1,5$, $\angle M_3BQ = \frac{\pi}{6}$ onda

$$M_3B = \frac{M_3Q}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

Deməli, $x = -3$, $y = -2$. $M_3(-3; -2)$ olar.

4. $x > 0$, $y < 0$ olarsa,



$$M_4A = \frac{M_4P}{\sin \angle M_4AP} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2$$

$\triangle M_4QB$ üçbucağından $M_4Q = 1,5$, $\angle M_4BQ = \frac{\pi}{6}$ olduğu üçün

$$M_4B = \frac{M_4Q}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1,5}{0,5} = 3$$

Deməli, $x = 3$, $y = -2$ və $M_4(3; -2)$.

Cavab: $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(-3; -2)$ və $(3; -2)$.

N3 $\omega = 120^\circ$ olduqda $M(3; 0)$ və $N(1; -2)$ nöqtələri arasındakı məsafəni hesablamalı.

Həlli: İki (x_1, y_1) və (x_2, y_2) koordinatlı nöqtələr arasındakı məsafə

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos \omega}$$

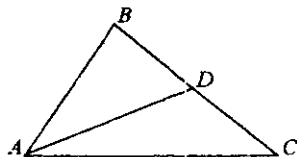
olduğundan

$$|MN| = \sqrt{(3-1)^2 + (0+2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 120^\circ} = \sqrt{4+4+2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{8-4} = 2$$

olacaqdır.

N4 Koordinat bucağı $\omega = 60^\circ$ olan çəptücaqlı koordinat sistemində təpə nöqtələri $A(0; 0)$, $B(7; 4)$ və $C(-1; 6)$ olan üçbucaq verilmişdir. A təpəsindən çəkilmiş medianın uzunluğunu hesablamalı.

Həlli: A təpəsindən çəkilmiş medianın BC tərəfi ilə kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapaq.



Əgər $D(x, y)$ işarə etsək, onda

$$x = \frac{7-1}{2} = 3, \quad y = \frac{4+6}{2} = 5$$

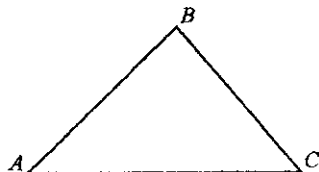
$D(3, 5)$ və $A(0, 0)$ nöqtələri arasındakı məsafəni tapaq.

$$d = \sqrt{9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{9 + 25 + 15} = 7$$

Deməli, $|BD| = 7$.

№5 Koordinat bucağı $\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ olan çəpbucaqlı koordinat sistemində düzgün üçbucağın iki $A(2, -2)$ və $B(7, 1)$ təpə nöqtələri verilmişdir. Onun üçüncü təpəsini tapmalı.

Həlli: Üçüncü təpəsini $C(x, y)$ ilə işarə edək.



AB tərəfinin uzunluğunu tapsaq

$$|AB| = \sqrt{(7-2)^2 + (1+2)^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]} = \sqrt{25 + 9 - 30 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{34 - 18} = 4$$

Onda $|CB| = |AC| = 4$ olar. Ona görə də aşağıdakı tənlikləri alırıq:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + 2(x-2)(y+2)\cos\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]} = 4$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2 + 2(x-7)(y-1)\cos\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]} = 4$$

Buradan

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 - \frac{6}{5}(x-2)(y+2) = 16$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = 2y + 1 - \frac{6}{5}(x-7)(y-1) = 16$$

tənlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq

$$10x - 45 + 6y + 3 - \frac{6}{5}(xy + 2x - 2y - 4 - xy + x + 7y - 7) = 0$$

$$50x + 30y - 210 - 18x - 30y + 66 = 0$$

$$32x = 144$$

$$x = 4,5$$

alırıq. x -in bu qiymətini tənliklərdən birinin yerinə yazsaq, y -in qiymətini təyin edirik.

№6 $A(10; -4)$ və $B(7; -1)$ nöqtələri arasındakı məsafənin 3-ə bərabər olduğunu bilərək ω koordinat bucağını təyin etməli.

Həlli:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega$$

düsturundan istifadə edək

$$3^2 = (10 - 7)^2 + (-4 + 1)^2 + 2(10 - 7)(-4 + 1)\cos\omega$$

$$9 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos\omega$$

$$\cos\omega = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

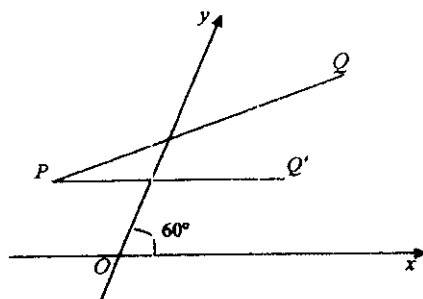
Onda $\omega = \frac{\pi}{3}$ olur.

№7 $P(-1; 4)$ və $Q(2; 7)$ nöqtələrini birləşdirən parça Ox oxu ilə hansı bucağı əmələ gətirir?

Həlli: Parçanın Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi φ bucağını tapmaq üçün

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(y_2 - y_1) \sin \omega}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cos \omega}$$

düsturundan istifadə edək.



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(7-4) \sin 60^\circ}{(2+1) + (7-4) \cos 60^\circ} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Deməli, $\varphi = 30^\circ$.

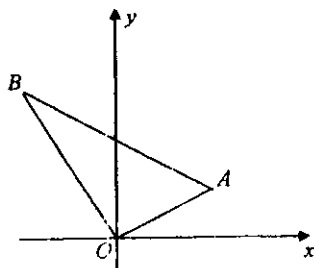
Nə8 Tapə nöqtələrindən biri koordinat başlanğıcında, qalan ikisi isə

$A(3;1)$, $B(-1;4)$ nöqtələrində olan üçbucağın sahəsini hesablamalı. $\omega = 150^\circ$

Həlli: Üçbucağın sahəsi

$$S = \left| \frac{\sin \omega}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \right|$$

düstru ilə hesablanır.



Onda

$$S = \left| \frac{\sin 150^\circ}{2} (0 + 3(4 - 0) - 1(0 - 1)) \right| = \left| \frac{1}{4} (12 + 1) \right| = \frac{13}{4} \text{ kv.vah.} = 3,25 \text{ kv.vah.}$$

olar.

N9 $P(3; -1; 2)$ və $Q(8; 4; 6)$ nöqtələrinin koordinat oxlarına və koordinat müstəvilərinə nəzərən simmetrik nöqtələrini tapın.

Həlli: (OXY) müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtələrin koordinatlarını yazaq:

$$P'(3; -1; -2) \text{ və } Q'(8; 4; -6)$$

(OYZ) müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtələr

$$P'(-3; -1; 2) \text{ və } Q'(-8; 4; 6)$$

(OXZ) müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtələr

$$P'(3; 1; 2) \text{ və } Q'(8; -4; 6)$$

Ox oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr

$$P'(3; 1; -2) \text{ və } Q'(8; -4; -6)$$

Oy oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr

$$P'(-3; -1; -2) \text{ və } Q'(-8; 4; -6)$$

Oz oxuna nəzərən simmetrik nöqtələr

$$P'(-3; 1; 2) \text{ və } Q'(-8; -4; 6)$$

olar.

N10 Koordinatları aşağıdakı şərtləri ödəyən nöqtələr hansı oktantlarda yerləşə bilər?

- 1) $x - y = 0$; 2) $x + y = 0$; 3) $x - z = 0$;
4) $x + z = 0$; 5) $y - z = 0$; 6) $y + z = 0$.

Həlli: 1) $x=y$ olması üçün x və y eyni işarəli olmalıdırlar. Deməli, nöqtə I, III, V və VII oktantda yerləşə bilər.

2) $x=-y$ olması üçün nöqtə II, IV, VI və VIII oktantda yerləşə bilər.

3) $x-z=0$ və ya $x=z$ şərtini ödəyən nöqtələr I, IV, VI və VII oktantda yerləşməlidir.

4) $x+z=0$ və ya $x=-z$ olması üçün nöqtə II, III, V və VIII oktantda yerləşə bilər.

5) $y=z$ olanda nöqtə I, II, VII və VIII oktantda yerləşə bilər.

6) $y=-z$ şərtini ödəyən nöqtə III, IV, V və VI oktantda yerləşə bilər.

№11 Radiusu $R=3$ olan küre koordinat müstəvilərinin üçünə də toxunur və
1) ikinci oktantda; 2) beşinci oktantda; 3) yeddinci oktantda yerləşir.
Kürənin mərkəzini tapın.

Həlli: 1) İkinci oktantda yerləşən nöqtələrin absisi mənfi, ordinatı və aplikatı isə müsbət olur. Küre bütün koordinat müstəvilərinə toxunduğu üçün kürenin mərkəzindən toxunma nöqtələrinə qədər olan məsafələr 3-ə bərabər olacaq. Deməli, kürenin mərkəzinin koordinatları $(-3, 3, 3)$ olacaqdır.

2) II halda

Cavab: $(3, 3, -3)$

3) III halda

Cavab: $(-3, -3, -3)$ olar.

№12 İsbat edin ki, təpə nöqtələri $A(3; -2; 5)$; $B(-2; 1; -3)$; $C(5; 1; -1)$ olan üçbucağın bütün bucaqları itidir.

Həlli: Üçbucağın tərəflərini tapın.

$$a = |BC| = \sqrt{(5+2)^2 + (1-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{53}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(5-3)^2 + (1+2)^2 + (-1-5)^2} = 7$$

$$c = |AB| = \sqrt{(-2-3)^2 + (1+2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Üçbucağın bucaqlarının iti olması üçün onun iki tərəfinin kvadratları cəminin üçüncü tərəfin kvadratından böyük olması şərti ödənilməlidir.

$$98 < 53 + 49$$

$$53 < 98 + 49$$

$$49 < 98 + 53$$

bərabərsizliklərindən aydın olur ki, verilmiş üçbucağın bütün bucaqları itidir.

№13 Kürə səthi $P(4;-1;-1)$ nöqtəsindən keçir və bütün koordinat müstəvilərinə toxunur. Onun mərkəzini və radiusunu tapın.

Həlli: $P(4;-1;-1)$ nöqtəsi VIII oktantda yerləşir. Deməli, kürə səthi də VIII oktantda yerləşir. Kürənin radiusunu R ilə işarə etsək, onda kürənin mərkəzi $(R;-R;-R)$ kimi yazıla bilər.

Aydındır ki, $|PK| = R$. Onda

$$R^2 = (R-4)^2 + (-R+1)^2 + (-R+1)^2$$

$$R^2 = R^2 - 8R + 16 + R^2 - 2R + 1 + R^2 - 2R + 1$$

$$2R^2 - 12R + 18 = 0$$

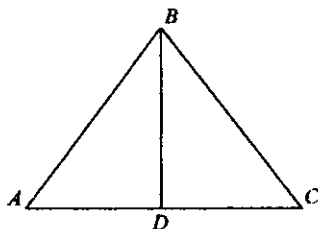
$$R^2 - 6R + 9 = 0$$

$$(R-3)^2 = 0$$

alırıq. Deməli, kürə səthinin mərkəzi $K(3;-3;-3)$ nöqtəsində yerləşir və radiusu $R = 3$ olur.

№14 $A(1;2;-1)$; $B(2;-1;3)$; $C(4;-7;5)$ nöqtələri üçbucağın təpə nöqtələridir. Onun B təpəsindəki daxili bucağın tənböləninin uzunluğunu tapın.

Həlli: BD tənbələnin uzunluğunu tapmaq üçün onun AC tərəfi ilə kəsişmə nöqtəsi olan D nöqtəsini tapaq.



Aytdırdı ki,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

Onda

$$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{26}$$

$$|BC| = \sqrt{(-4-2)^2 + (7+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

Deməli,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}} = \frac{1}{2}$$

D nöqtəsinin koordinatlarını $D(x, y, z)$ ilə işarə edək. Onda

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2$$

$$y = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot (-7)}{1 + \frac{3}{2}} = -1$$

$$z = \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = 1$$

olar. Deməli, $D(2, -1, 1)$ olacaqdır. Onda BD tənbələnin uzunluğu

$$|BD| = \sqrt{(2-2)^2 + (-1+1)^2 + (1-3)^2} = 2$$

olar.

№15 Düz xətt iki $M_1(-1;6;6)$ və $M_2(3;-6;-2)$ nöqtələrindən keçir. Bu xəttin koordinat müstəviləri ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

Həlli:

1. Düz xəttin OXY müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini tapaq. Bu nöqtəni

$L_1(x_1; y_1; 0)$ ilə işarə edək. Aydırdır ki, $\frac{M_1 L_1}{L_1 M_2} = \lambda_1$ olarsa, onda

$$x_1 = \frac{-1+3\lambda_1}{1+\lambda_1}; \quad y_1 = \frac{6+(-6)\lambda_1}{1+\lambda_1}; \quad 0 = \frac{6+(-2)\lambda_1}{1+\lambda_1}$$

olar. Bu tənliklərin üçünü birləşə həll etdikdə

$$\lambda_1 = 3$$

$$x_1 = \frac{-1+9}{1+3} = 2$$

$$y_1 = \frac{6-18}{1+3} = -3$$

alınır.

Deməli, $L_1(2;-3;0)$ nöqtəsi düz xəttin OXY müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

2. Düz xəttin OYZ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini $L_2(0; y_2; z_2)$ ilə işarə etsək

$\frac{M_1 L_2}{L_2 M_2} = \lambda_2$ olduğundan

$$0 = \frac{-1+\lambda_2 \cdot 3}{1+\lambda_2}; \quad y_2 = \frac{6-6\lambda_2}{1+\lambda_2}; \quad z_2 = \frac{6-2\lambda_2}{1+\lambda_2}$$

bərabərliklərini alırıq. Buradan isə

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \text{ olduğundan}$$

$$y_2 = \frac{6-2}{1+\frac{1}{3}} = 3$$

$$z_2 = \frac{6-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 4$$

olar. Deməli, OYZ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsi $M_2(0;3;4)$ olacaqdır.

3. Düz xəttin OXZ koordinat müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini $L_3(x_2;0;z_3)$ adlandıraraq.

Orda $\frac{M_1L_3}{L_3M_2} = \lambda_3$ olarsa,

$$x_3 = \frac{-1+3\lambda_3}{1+\lambda_3}; \quad 0 = \frac{6-6\lambda_3}{1+\lambda_3}; \quad z_3 = \frac{6-2\lambda_3}{1+\lambda_3}$$

bərabərliklərini alırıq. Buradan isə

$$\lambda_3 = 1;$$

$$x_3 = 1;$$

$$z_3 = 2.$$

alırıq. Deməli, düz xəttin OXZ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsi $L_3(1;0;2)$ nöqtəsidir.

№16 $M(-3;-5)$ və $N(x;y)$ nöqtələri Oz oxuna nəzərən simmetrikdir. Koordinat bucağı

$\omega = \frac{\pi}{3}$ olduğundan, N nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Cavab: $x = -8, \quad y = 5$

№17 Koordinat bucağı $\omega = \frac{2\pi}{3}$ olan üçbucaqlı koordinat sisteminde üçbucağın təpə

nöqtələri verilib: $A(0,0), B(7,4), C(-1,6)$. A təpəsindən çəkilmiş medianın uzunluğunu tapın.

Cavab: $\sqrt{19}$

№18 $A(14,3)$, $B(9,-2)$, $C(4,1)$ nöqtələri üçbucağın təpə nöqtələridir. Koordinat bucağı $\omega = \frac{2\pi}{3}$ olarsa, üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarını tapın.

Cavab: $AB = 5$, $AC = 2\sqrt{21}$, $BC = 7$

№19 Düz xətt $M(2;3\sqrt{2})$ və $M(6;-\sqrt{2})$ nöqtələrindən keçir. Bu xəttin koordinat oxları arasında qalan parçanın uzunluğunu tapın. Koordinat bucağı $\omega = \frac{\pi}{4}$

Cavab: $AB = 5$

№20 Təpə nöqtələri $A(-5,-1)$, $B(3,-2)$, $C(1,4)$ olan üçbucağın sahəsi 11,5 kv.vahiddir. ω koordinat bucağını tapın.

Cavab: $\omega = 30^\circ$ və ya $\omega = 150^\circ$

№21 Kubun dörd təpəsi verilir: $A(-a;-a;-a)$, $B(a;-a;-a)$, $C(-a;a;-a)$ və $D(a;a;a)$ Onun qalan təpə nöqtələrini tapın.

Cavab: $(a;a;-a)$, $(a;-a;a)$, $(-a;a;a)$ və $(-a;-a;-a)$

№22 Təpələri $M_1(4;-1;4)$, $M_2(0;7;-4)$, $M_3(3;1;2)$ olan üç bucağın bucaqları arasında kor bucaq olub-olmadığını təyin edin.

Cavab: $\angle M_1M_2M_3$ - kor bucaqdır.

№23 Absis oxu üzərində $A(-3;4;8)$ nöqtəsindən məsafəsi 12-yə bərabər olan nöqtəni tapın.

Cavab: $(5;0;0)$ və $(-11;0;0)$

№24 Ordinat oxu üzərində $A(1;-3;7)$ və $B(5;7;-5)$ nöqtələrindən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtəni tapın.

Cavab: $(0;2;0)$

№25 $C(2;0;2)$ və $D(5;-2;0)$ nöqtələri ilə üç bərabər hissəyə bölünmüş parçanın uclarının koordinatlarını tapın.

Cavab: $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;-2)$

IV FƏSLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR

Müstəvidə düz xətt

№1 Düzbucaqlının iki tərəfinin $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ tənliyi və onun təpələrindən birinin $A(2; -3)$ koordinatı verilir. Bu düzbucaqlının qalan iki tərəfinin tənliyini tərtib edin.

Həlli: Verilən tərəflərin bucaq əmsallarının tapıq.

$$2x - 3y + 5 = 0 \text{ tənliyindən } y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \text{ yaxud } k_1 = \frac{2}{3},$$

$$3x + 2y - 7 = 0 \text{ tənliyindən isə } k_2 = -\frac{3}{2} \text{ alınır. Deməli } k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

$A(2; -3)$ nöqtəsinin bu tərəflərin üzərində yerləşib-yerləşmədiyini müəyyən edək.

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 5 \neq 0$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) - 7 \neq 0$$

A nöqtəsi verilən bitişik tərəflər üzərində yerləşmir.



Onda tutaq ki, (BC) tərəfi $2x - 3y + 5 = 0$ tənliyi ilə, (DC) tərəfi isə $3x + 2y - 7 = 0$ tənliyi ilə təyin olunur. (AB) və (AD) tərəflərinin tənliklərini quraq. $(AD) \parallel (BC)$ ona görə (AD) -nin bucaq əmsalı $k_1 = \frac{2}{3}$,

(AD) -nin tənliyi isə

$$y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$2x - 4 = 3y + 9$$

$$2x - 3y - 13 = 0$$

olar. $(AB) \parallel (DC)$. Onda $k_2 = -\frac{3}{2}$ və (AB) -nin tənliyi

$$y + 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$

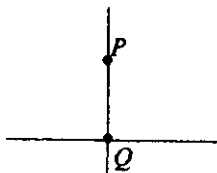
$$2y + 6 + 3x - 6 = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

olar.

M2 $P(-6; 4)$ nöqtəsinin $4x - 5y + 3 = 0$ düz xətti üzərində proyeksiyasını tapın.

Həlli: P nöqtəsindən keçən və verilən düz xəttə perpendikulyar olan düz xətt ilə verilən düz xəttin kəsişmə nöqtəsi, axtarılan nöqtədir.



Verilən düz xəttin bucaq əmsalını tapaq.

$$4x - 5y + 3 = 0$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$k_1 = \frac{4}{5}.$$

Axtarılan xəttin bucaq əmsalı isə $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{5}{4}$ olar. P nöqtəsindən keçən və

verilən düz xəttə perpendikulyar olan düz xəttin tənliyi

$$y - 4 = -\frac{5}{4}(x + 6),$$

$$4y - 16 + 5x + 30 = 0,$$

$$5x + 4y + 14 = 0$$

olacaqdır. Xətlərin kəsişmə nöqtəsini tapaq.

$$\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 4y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} \\ y = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{5} = -\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}$$

$$\frac{16 + 25}{20}x = -\frac{7}{2} - \frac{3}{5}$$

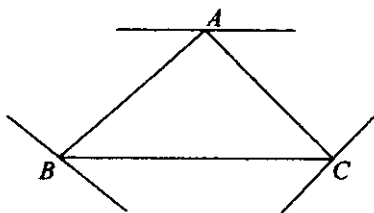
$$\frac{41}{20}x = -\frac{41}{10}$$

Buradan

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ alırıq. Axtarılan nöqtə } (-2; -1) \text{ olacaqdır.}$$

№3 Üçbucağın $A(0;0)$, $B(-1;-3)$, $C(-5;-1)$ təpələrindən keçən və onun qarşı tərəflərinə paralel olan düz xətlərin tənliklərini tərtib edin.

Həlli: A təpəsindən keçən düz xətt (BC) tərəfinə paralel olduğu üçün onun bucaq əmsalı (BC) tərəfinin bucaq əmsalına bərabərdir.



$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ düsturundan istifadə edərək (BC) tərəfinin bucaq əmsalını hesablayaq.

$$k_1 = \frac{-3+1}{-1+5} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$A(0;0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı $k_1 = -\frac{1}{2}$ olan düz xəttin tənliyi

$$y = -\frac{1}{2}x \text{ və ya } x + 2y = 0 \text{ olar.}$$

B təpəsindən keçən və (AC) tərəfinə paralel olan düz xəttin bucaq əmsalı $k_2 = \frac{1}{5}$

olur. Düz xəttin tənliyini qursaq

$$y + 3 = \frac{1}{5}(x + 1)$$

$$x + 1 = 5y + 15$$

$$x - 5y - 14 = 0$$

alırıq.

C təpəsindən keçən və (AB) tərəfinə paralel olan düz xəttin bucaq əmsalı

$$k_3 = \frac{3}{1} = 3 \text{ olduğundan bu xəttin tənliyini}$$

$$y+1=3(x+5)$$

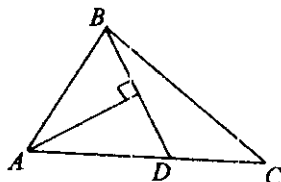
$$3x-y+14=0$$

şəklində almaq olar.

- №4** Üçbucağın təpə nöqtələrinin $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ və $C(3;5)$ koordinatları verilmişdir. B nöqtəsindən çəkilmiş mediana A təpəsindən endirilən perpendikulyarın tənliyini tərtib edin.

Həlli: D nöqtəsi (AC) -nin orta nöqtəsi olduğundan onun koordinatları

$$D\left(\frac{1+3}{2}; \frac{-1+5}{2}\right) \Leftrightarrow D(2;2) \text{ olar.}$$



Medianın tənliyini qursaq:

$$\frac{x+2}{4} = y-1$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$$

tənliyini alırıq. (BD) medianının tənliyinin bucaq əmsalı $k_1 = \frac{1}{4}$. Onda A

təpəsindən çəkilmiş perpendikulyarın bucaq əmsalı $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -4$ olduğundan

tənliyi

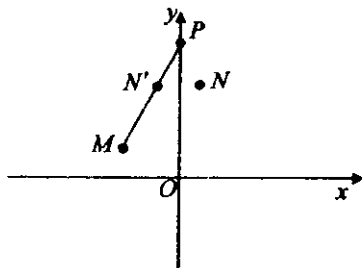
$$y+1=-4(x-1)$$

$$4x+y-3=0$$

şəklində alınar.

- №5** Ordinat oxu üzərində ehtimal P nöqtəsi tapın ki, onun $M(-3;2)$ və $N(2;5)$ nöqtələrinə qədər məsafələri fərqi ən böyük olsun.

Həlli: M və N nöqtələri ordinat oxuna nəzərən müxtəlif tərəflərdə yerləşirlər. Onda ikisindən birinin, məsələn N nöqtəsinin Oy oxuna nəzərən simmetrik olan nöqtəsini tapaq. Bu nöqtə $N'(-2;5)$ olar.



M və N' nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini quraq.

$$\frac{x+3}{-2+3} = \frac{y-2}{5-2}$$

$$3x+9=y-2$$

$$3x-y+11=0$$

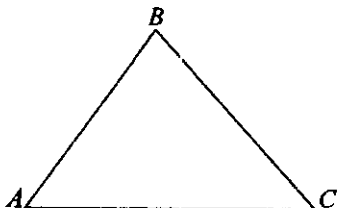
Bu düz xəttin Oy oxu ilə kəsişmə nöqtəsi axtarılan nöqtə olar, ona görə də bu xəttin tənliyini $x=0$ tənliyi ilə birgə həll etsək, həmin nöqtənin koordinatlarını taparıq.

$$\begin{cases} 3x-y+11=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=11 \end{cases}$$

Cavab: $P(0;11)$

№6 Üçbucağın tərəflərinin $3x+4y-1=0$, $x-7y-17=0$ və $7x+y+31=0$ tənlikləri verilir. İsbat edin ki, bu üçbucaq bərabəryanlıdır.

Həlli: $\triangle ABC$ üçbucağı çəkək.



Tutaq ki,

(AB) tərəfinin tənliyi $3x + 4y - 1 = 0$,

(BC) tərəfinin tənliyi $x - 7y - 17 = 0$,

(AC) tərəfinin tənliyi isə $7x + y + 31 = 0$ şəklindədir.

Onda (AB) tərəfinin bucaq əmsalı $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, $k_1 = -\frac{3}{4}$,

(AC) tərəfinin bucaq əmsalı $y = -7x - 31$, $k_2 = -7$,

(BC) tərəfinin bucaq əmsalı isə $y = \frac{1}{7}x - \frac{11}{7}$, $k_3 = \frac{1}{7}$ olar. (AB) və (AC) tərəfləri

arasında qalan $\angle BAC$ -nin tangensi

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{-\frac{3}{4} + 7}{1 + \frac{3}{4} \cdot 7} = \frac{28 - 3}{21 + 4} = \frac{25}{25} = 1$$

olduğundan $\angle A = 45^\circ$ olar. (AC) və (BC) tərəflərinin bucaq əmsalları

$$k_2 = -\frac{1}{k_3}$$

olduğu üçün $(AC) \perp (BC)$ və $\angle C = 90^\circ$ onda $\angle B = 45^\circ$ olar. Deməli, $\triangle ABC$ bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır.

N7 İsbat edin ki, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ və $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ düz xətləri arasındakı φ bucağını təyin etmək üçün düstur aşağıdakı şəkildə yazıla bilər.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

İsbatı: Məlumdur ki, düz xətlər arasında qalan φ bucağı

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

düsturu ilə hesablanır. Verilən düz xətlərin bucaq əmsallarını təyin edək.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ tənliyindən}$$

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \text{ və } k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \text{ alınır.}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \text{ tənliyindən isə } y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}, k_2 = -\frac{A_2}{B_2} \text{ olduğunu təyin}$$

edirik. Bu qiymətləri düsturda yazsaq

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{B_1B_2}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} \cdot \frac{B_1B_2 + A_1A_2}{B_1B_2}} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

alırıq.

№8 $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$ və $D(3;1)$ nöqtələrinin trapesiyanın təpə nöqtələri olduğunu yoxlamalı və bu trapesiyanın orta xəttinin və diaqonallarının tənliyini tapmalı.

Həlli: $ABCD$ dördbucaqlısının tərəflərinin tənliklərini yazaq:

(AB) tərəfi üçün

$$\frac{x+2}{-3+2} = \frac{y+2}{1+2}$$

$$3x+6 = -(y+2)$$

$$y = -3x - 8$$

Bu tərəfin bucaq əmsalı $k_1 = -3$ -dir.

(BC) tərəfi üçün

$$\frac{x+3}{7+3} = \frac{y-1}{7-1}$$

$$\frac{x+3}{10} = \frac{y-1}{6}$$

$$3x+9=5y-5$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$$

$$k_2 = \frac{3}{5};$$

(CD) tərəfi üçün

$$\frac{x-7}{3-7} = \frac{y-7}{1-7}$$

$$\frac{x-7}{-4} = \frac{y-7}{-6}$$

$$3x-21=2y-14$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$k_3 = \frac{3}{2};$$

(AD) tərəfi üçün

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y+2}{1+2}$$

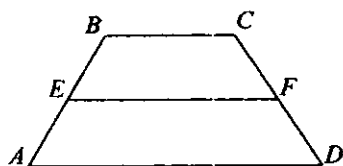
$$3x+6=5y+10$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$$

$$k_4 = \frac{3}{5}$$

alınır. Burada $k_2 = k_4$ olduğundan $(BC) \parallel (AD)$, $k_1 \neq k_3$ olduğundan isə $(AB) \nparallel (CD)$

alınır. Deməli $ABCD$ dördbucaqlısı trapesiyadır. Trapesiyanın oturacaqları (BC) və (AD) tərəfləridir, yan tərəfləri isə (AB) və (CD) -dir. (EF) orta xəttidir, (BC) və (AD) tərəflərinə paraleldir.



E və F nöqtələrinin koordinatlarını hesablasaq $E(-2,5;-0,5)$, $F(5;4)$ alırıq. Onda (EF) orta xəttin tənliyi

$$\frac{x+2,5}{5+2,5} = \frac{y+0,5}{4+0,5}$$

$$\frac{x+2,5}{7,5} = \frac{y+0,5}{4,5}$$

$$\frac{2x+5}{15} = \frac{2y+1}{9}$$

$$6x+15=10y+5$$

$$6x+10y+10=0$$

və ya $3x-5y+5=0$ şəklində alınar.

(AC) və (BD) diaqonallarının tənliklərini qırsaq

(AC) üçün

$$\frac{x+2}{7+2} = \frac{y+2}{7+2}$$

$$y-x=0$$

(BD) üçün

$$\frac{x+3}{3+3} = \frac{y-1}{1-1}$$

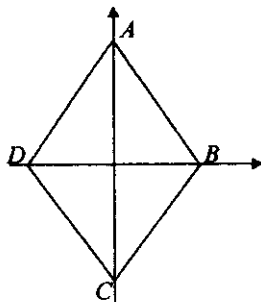
$$y=1$$

tənliklərini alırıq.

№9

Rombun 8 və 6 uzunluq vahidinə bərabər olan diaqonalları koordinat oxları kimi götürülmüşdür. Bu rombun tərəflərinin tənliklərini tapmalı.

Həlli: Rombun təpə nöqtələri $A(0;3)$, $B(4;0)$, $C(0;-3)$, $D(-4;0)$ olacaqdır.



Onda (AB) tərəfinin tənliyi

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

$$3x + 4y - 12 = 0$$

(BC) tərəfinin tənliyi

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$$

$$3x - 4y - 12 = 0$$

(CD) tərəfinin tənliyi

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$$

$$3x + 4y + 12 = 0$$

(AD) tərəfinin tənliyi isə

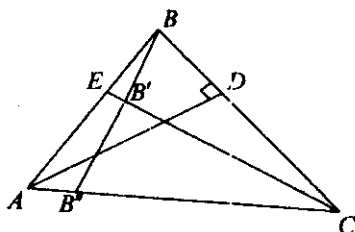
$$\frac{x}{-4} - \frac{y}{3} = 1$$

$$3x - 4y + 12 = 0$$

olacaqdır.

- №10** Üçbucağın təpələrindən biri olan $B(2;-1)$ nöqtəsini, müxtəlif təpələrdən çəkilmiş hündürlüyün $3x - 4y + 27 = 0$ tənliyini və tənböləninin $x + 2y - 5 = 0$ bilərək, üçbucağın tərəflərinin tənliyini təyin edin.

Həlli: ABC üçbucağını çəkək.



Tutaq ki, (AD) hündürlük, (CE) isə tənböldür. Onda (BC) tərəfinin bucaq əmsalını tapmaq üçün, (AD) tərəfinin bucaq əmsalı tənliyini yazaq $y = \frac{3}{4}x + \frac{27}{4}$,

onda (BC) tərəfinin bucaq əmsalı $k = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$ olar.

(BC) tərəfinin tənliyi isə

$$y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

$$3y + 3 + 4x - 8 = 0$$

$$4x + 3y - 5 = 0$$

olar.

C təpəsinin koordinatlarını tapaq. Bunun üçün (BC) tərəfinin və (CE) tənböləninin tənliklərini birgə həll edək

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \begin{cases} -5y = -15 \\ x = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

yəni $C(-1; 3)$ olar.

B təpəsindən (CE) tənböləsinə perpendikulyar olan (BB') düz xəttinin tənliyini yazaq.

$$x + 2y - 5 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

(BB') perpendikulyarının bucaq əmsalı

$$k = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 \text{ olar.}$$

$B(2; -1)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı $k = 2$ olan bu xəttin tənliyi

$$y + 1 = 2(x - 2)$$

$$2x - y - 5 = 0$$

olacaqdır. (BB') və (CE) xətlərinin kəsişmə nöqtəsi B' -i tapaq.

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x + 2(2x - 5) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Deməli, $B'(3; 1)$.

Əgər (BB') və (AC) xətlərinin kəsişmə nöqtəsini B'' ilə işarə etsək, $\triangle BCB''$ bərabəryanlı üçbucaqdır. (CB' həm tənbölən, həm də hündürlükdür).

Deməli, CB' həm də mediandır və B' nöqtəsi BB'' tərəfini yarıya bölür. Onda $B''(x, y)$ nöqtəsinin koordinatları

$$x = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

$$y = 2 \cdot 1 - (-1) = 3$$

$B''(4; 3)$ olar. (AC) tərəfinin iki $C(-1; 3)$ və $B''(4; 3)$ nöqtələri məlumdur. Onun tənliyi

$$\frac{x+1}{4+1} = \frac{y-3}{3-3}$$

$$y = 3$$

olar. (AC) və (AD) xətlərinin kəsişmə nöqtəsi olan A nöqtəsinin koordinatlarını

$$\begin{cases} 3x - 4y + 27 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$A(-5;3)$ şəklində təyin edirik.

İndi də (AB) tərəfinin tənliyini

$$\frac{x+5}{2+5} = \frac{y-3}{-1-3}$$

$$\frac{x+5}{7} = \frac{y-3}{-4}$$

$$4x + 20 + 7y - 21 = 0$$

$$4x + 7y - 1 = 0$$

almaq olar.

Cavab: $4x + 3y - 5 = 0$, $4x + 7y - 1 = 0$ və $y - 3 = 0$

№11 m və n -in hansı qiymətlərində $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ düz xətti absis oxuna paraleldir və ordinat oxu üzərində (-3) -ə bərabər parça ayırır. (koordinat başlangıcından hesablamaqla)

Bu düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Əgər düz xətt absis oxuna paraleldirsə $m + 2n - 3 = 0$ olmalıdır və tənlik

$(2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ və ya $y = -\frac{6m+9}{2m-n+1}$ şəklində alınır. Həmin düz xətt

ordinat oxunda koordinat başlangıcından hesablamaqla (-3) -ə bərabər parça

ayırırsa, $\frac{-6m+9}{2m-n+1} = -3$ olur. Bu şərtlər eyni zamanda ödənilməlidir. Onları birgə

$$\text{həl etsək: } \begin{cases} m + 2n - 3 = 0 \\ \frac{-6m+9}{2m-n+1} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2n - 3 = 0 \\ 2m + 3 = 2m - n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ m = 4 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ n = -2 \end{cases}$$

alırıq. Onda düz xəttin tənliyi $y + 3 = 0$ olacaqdır.

№12 $B(5; -5)$ nöqtəsindən keçən və koordinat bucağından sahəsi 50 kv.vahid olan üçbucaq ayıran düz xəttin tənliyini tərtib edin.

Həlli: Axtarılan düz xəttin $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ şəklində parçalarla tənliyinə baxaq. Üçbucağın sahəsi

$$S = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| \text{ olduğundan}$$

$$|a| \cdot |b| = 2S = 100$$

$$|a| = \frac{100}{|b|} \text{ və ya } |b| = \frac{100}{|a|} \text{ olar. } B(5; -5) \text{ nöqtəsi düz xətt üzərindədir və bu nöqtə IV}$$

rübdə yerləşir. Deməli, düz xətt aşağıdakı parçaları ayıra bilər:

$$1) a > 0, b > 0$$

$$2) a > 0, b < 0$$

$$3) a < 0, b < 0$$

$$1) a > 0, b > 0 \text{ halına baxaq. Onda}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{100} = 1 \text{ olar.}$$

B nöqtəsinin koordinatlarını yerinə yazsaq:

$$a^2 + 20a - 100 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100 + 100 = 200$$

$$a_1 = -10 + \sqrt{200} = 10\sqrt{2} - 10 = 10(\sqrt{2} - 1)$$

$$a_2 < 0$$

(yuxarıdakı şərt ödənilir)

$$a = 10(\sqrt{2} - 1), b = \frac{100}{10(\sqrt{2} - 1)} = 10(\sqrt{2} + 1) \text{ olar. Onda tənlik}$$

$$\frac{x}{10(\sqrt{2} - 1)} + \frac{y}{10(\sqrt{2} + 1)} = 1$$

$$(\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y - 10 = 0$$

şeklinde alınır.

2) $a > 0$, $b < 0$ olarsa, onda

$$b = -\frac{100}{a} \text{ v\ae}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{\frac{100}{a}} = 1 \text{ olacaqdır. Buradan}$$

$$\frac{5}{a} + \frac{5}{100} = 1$$

$$\frac{5}{a} + \frac{a}{20} - 1 = 0$$

$$\frac{100 + a^2 - 20a}{20a} = 0$$

$$a^2 - 20a + 100 = 0$$

$$(a-10)^2 = 0$$

$$a = 10, b = -10$$

$$\frac{x}{10} - \frac{y}{10} = 1 \text{ v\ae ya } x - y - 10 = 0 \text{ olar.}$$

3) $a < 0$, $b < 0$, onda 1)-ci halda olduđu kimi $b = \frac{100}{a}$ t\ae nliyi alınır.

$$a^2 + 20a - 100 = 0$$

$D = 200$ v\ae $a_1 > 0$ (ş\ae rti d\ae denmir) $a_2 = -10 - \sqrt{200} = -10(\sqrt{2} + 1)$ alınır. Onda

$$a = -10(\sqrt{2} + 1), b = \frac{100}{-10(\sqrt{2} + 1)} = -10(\sqrt{2} - 1) \text{ olduğundan} \quad \text{t\ae nlik}$$

$$\frac{x}{-10(\sqrt{2} + 1)} + \frac{y}{-10(\sqrt{2} - 1)} = 1$$

v\ae ya

$$(\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{2} + 1)y + 10 = 0 \text{ ş\ae klinde olar.}$$

Cavab: $x - y - 10 = 0$, $(\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y - 10 = 0$, $(\sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{2} + 1)y + 10 = 0$

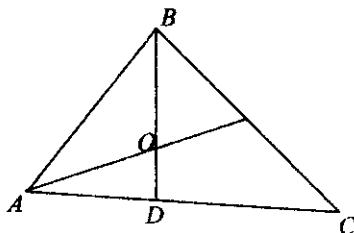
№13 Tərəfləri $x - y - 4 = 0$, $2x - 11y + 37 = 0$, $2x + 7y - 17 = 0$ tənlikləri ilə ifadə olunan üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsini tapın.

Həlli: $\triangle ABC$ üçbucağının tərəflərinin tənliklərini işarə edək:

$$(AB): x - y - 4 = 0$$

$$(AC): 2x - 11y + 37 = 0$$

$$(BC): 2x + 7y - 17 = 0$$



A təpəsinin koordinatlarını tapsaq

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 11y = -37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9y = -45 \\ x = 4 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}$$

$A(9;5)$ olar.

B təpəsinin koordinatları

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 9 \\ x = 4 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$B(5;1)$;

C təpəsinin koordinatları

$$\begin{cases} 2x - 11y = -37 \\ 2x + 7y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18y = 54 \\ 2x = 17 - 7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$C(-2;3)$ olar.

(BD) medianının D oturağının koordinatlarını hesablasaq

$$\left(\frac{9-2}{2}; \frac{5+3}{2}\right) = (3,5;4)$$

yaxud $D(3,5;4)$ olar. Medianların kəsişməsi olan O nöqtəsi (BD)medianını (B təpəsindən hesablasaq) 2:1 nisbətində böldür, yəni,

$$\frac{|BO|}{|OD|} = 2. \text{ Onda } O(x, y) \text{ işarə etsək:}$$

$$x = \frac{5+2 \cdot 3,5}{1+2} = \frac{5+7}{3} = 4$$

$$y = \frac{1+4 \cdot 2}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

alırıq. Medianların kəsişmə nöqtəsi $O(4;3)$ olacaq.

№14 Aşağıdakı halların hər biri üçün δ meylinin qiymətini və nöqtədən düz xəttə qədər olan d məsafəsini hesablayın:

$$A(2;-1), \quad 4x + 3y + 10 = 0$$

Həlli: Düz xəttin normal tənliyini quraq. Normallaşdırıcı vuruq:

$$\mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{16+9}} = -\frac{1}{5} \text{ olduğundan normal tənlik}$$

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0 \text{ olar.}$$

Onda A nöqtəsinin düz xətdən meyli δ_A -nı hesablasaq

$$\delta_A = -\frac{4}{5} \cdot 2 - \frac{3}{5} \cdot (-1) - 2 = -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} - 2 = -1 - 2 = -3$$

olduğundan A nöqtəsindən düz xəttə qədər məsafə $\delta_A = |\delta_A| = 3$ olar.

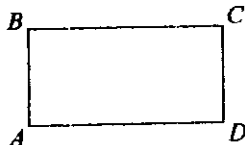
№15 Düzbucaqlının iki tərəfinin $3x - 2y - 5 = 0$ və $2x + 3y + 7 = 0$ tənliyi və təpələrindən biri olan $A(-2;1)$ nöqtəsi verilir. Bu düzbucaqlının sahəsini tapın.

Həlli: Verilən tənliklər bitişik tərəflərin tənlikləridir (çünki perpendikulyardırlar). $A(-2;1)$ nöqtəsinin bu xətlərin üzərində olub-olmadığını yoxlayaq.

$$3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 5 \neq 0$$

$$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 7 \neq 0$$

Deməli A təpəsi bu tərəflərin üzərində yerləşmir.



A nöqtəsindən verilən tərəflərə çəkilən məsafələri tapaq. Bunun üçün tərəflərin normal tənliklərini qursaq, uyğun olaraq

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{9+4}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{\sqrt{4+9}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{və}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0$$

tənliklərini alırıq. Onda məsafələr

$$\delta_1 = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot (-2) - \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{-6-2-5}{\sqrt{13}} = -\frac{13}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}$$

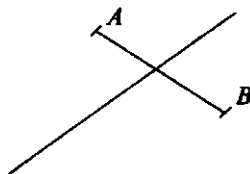
$$\delta_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot (-2) - \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{4-3-7}{\sqrt{13}} = -\frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$d_1 = |\delta_1| = \sqrt{13}, \quad d_2 = |\delta_2| = \frac{6}{\sqrt{13}} \quad \text{olduğundan düzbucaqlının sahəsi}$$

$$S = d_1 \cdot d_2 = 6 \text{ kv.vahidi olacaqdır.}$$

№16 $2x + y + 3 = 0$ düz xəttinin $A(-5;1)$ və $B(3;7)$ nöqtələri ilə məhdud olan parçanın kəsdiyini isbat edin.

İsbatı: Əgər AB parçası verilən düz xətti kəsirsə, onda A və B nöqtələri düz xəttə nəzərən müxtəlif tərəflərdə yerləşir. Koordinat başlanğıcı bu nöqtələrin biri ilə düz xəttə nəzərən bir tərəfdə yerləşir.



Deməli bu nöqtələrin meyilləri müxtəlif işarəli olmalıdırlar. Bu nöqtələrin düz xətdən olan meyillərini hesablayaq. Düz xəttin tənliyini normal şəkli gətirsək:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\delta_A = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (-5) + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{10+1-3}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

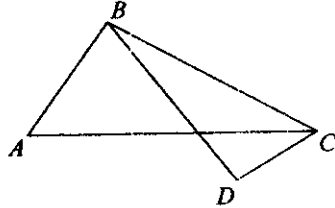
$$\delta_B = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 7 - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{-6-7-3}{\sqrt{5}} = -\frac{16}{\sqrt{5}}$$

olar. Burada $\delta_A > 0$, $\delta_B < 0$ olduğundan düz xətt verilən parçanı kəsir.

№17 Üçbucağın $A(-10;-13)$, $B(-2;-3)$ və $C(2;1)$ təpə nöqtələri verilir. C təpəsindən B təpəsinə çəkilmiş mediana endirilmiş perpendikulyarın uzunluğunu hesablayın.

Həlli: (BD) medianının D oturacağının koordinatlarını hesablayaq

$$D\left(\frac{-10+2}{2}; \frac{-13+1}{2}\right) = (-4; -6)$$



(BD) medianının tənliyini qursaq

$$\frac{x+2}{-4+2} = \frac{y-3}{-6-3}$$

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{-9}$$

$$9x+18=2y-6$$

$$9x-2y+24=0$$

alırıq. Tənliyi normal şəkə gətirsək

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{81+4}} = -\frac{1}{\sqrt{85}}$$

$$-\frac{9}{\sqrt{85}}x + \frac{2}{\sqrt{85}}y - \frac{24}{\sqrt{85}} = 0$$

oldugundan C nöqtəsinin (BD) medianından meyli

$$\delta_C = -\frac{9}{\sqrt{85}} \cdot 2 + \frac{2}{\sqrt{85}} \cdot 1 - \frac{24}{\sqrt{85}} = \frac{-18+2-24}{\sqrt{85}} = -\frac{40}{\sqrt{85}}$$

olar. Onda C təpəsindən (BD) medianına endirilmiş hündürlüyün uzunluğu

$$d = |\delta_C| = \frac{40}{\sqrt{85}} = \frac{40\sqrt{85}}{85} = \frac{8\sqrt{85}}{17}$$

olacaqdır.

№18 Kvadratin iki tərəfinin $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$ düz xətlərinin tənlikləri verilmişdir. Onun sahəsini hesablayın.

Həlli: Kvadratin tərəfinin uzunluğu verilərək paralel xətlər arasındakı məsafəyə bərabərdir. Birinci xətt üzərində bir nöqtə götürək $x = 13$ olarsa, $y = 0$ olacaqdır. $(13; 0)$ nöqtəsindən $5x - 12y + 26 = 0$ xətinə qədər olan məsafəni tapsaq

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{25 + 144}} = -\frac{1}{\sqrt{169}} = -\frac{1}{13}$$

$$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$$

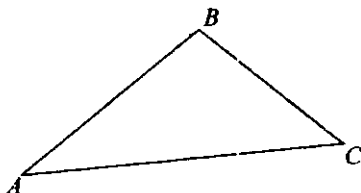
$$\delta = -\frac{5 \cdot 13}{13} + 0 - 2 = -5 - 2 = -7$$

$$d = |\delta| = 7$$

olar. Onda kvadratin sahəsi $S = d^2 = 49$ kv.vahidi.

№19 Üçbucağın tərəflərinin $x + 2y = 1$, $5x + 4y - 17 = 0$ və $x - 4y + 11 = 0$ tənlikləri verilmişdir. Üçbucağın təpə nöqtələrini təyin etmədən onun hündürlüklərinin tənliklərini tərtib edin.

Həlli: Birinci hündürlük $x + 2y = 1$, $5x + 4y - 17 = 0$ xətlərin kəsişmə nöqtəsindən keçən və $x - 4y + 11 = 0$ xətinə perpendikulyar olan düz xətt üzərindədir.



Onda düz xətlər dəstəsinin tənliyini qursaq:

$$x + 2y - 1 + \lambda(5x + 4y - 17) = 0$$

$$(1 + 5\lambda)x + (2 + 4\lambda)y + (-1 - 17\lambda) = 0$$

alarıq. Dəstənin bucaq əmsallı tənliklərini yazaq:

$$y = -\frac{1+5\lambda}{2+4\lambda}x + \frac{1+17\lambda}{2+4\lambda}$$

Burada $x-4y+11=0$ düz xəttinin bucaq əmsalı $k = \frac{1}{4}$; Onda dəstənin bucaq

əmsalı $k_1 = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$ olan düz xətt

$$-\frac{1+5\lambda}{2+4\lambda} = -4$$

$$1+5\lambda = 8+16\lambda$$

$$11\lambda = -7$$

$$\lambda = -\frac{7}{11}$$

qiymətinə görə təyin edilir. Hündürlüyün tənliyi

$$\left(1 - \frac{35}{11}\right)x + \left(2 - \frac{28}{11}\right)y - 1 + \frac{119}{11} = 0$$

$$-24x - 6y + 108 = 0$$

$$4x + y - 18 = 0$$

olar.

İkinci hündürlük $x+2y=1$ tərəfinə perpendikulyar olan düz xətdir və

$$(5x+4y-17) + \lambda(x-4y+11) = 0$$

düz xətlər dəstəsinə mənsubdur. Ona görə

$$(5+\lambda)x + (4-4\lambda)y - (17-11\lambda) = 0 \text{ və ya}$$

$$y = -\frac{5+\lambda}{4-4\lambda}x + \frac{17-11\lambda}{4-4\lambda}$$

olar. Bucaq əmsalı $k = -\frac{5+\lambda}{4-4\lambda} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$ olduğundan

$$-\frac{5+\lambda}{4-4\lambda} = 2$$

$$5+\lambda = 8\lambda - 8$$

$$7\lambda = 13$$

$$\lambda = \frac{13}{7}$$

olar. Hündürlüyün tənliyini yazsaq

$$\left(5 + \frac{13}{7}\right)x + \left(4 - \frac{52}{7}\right)y - 17 + \frac{143}{7} = 0$$

$$48x - 24y + 24 = 0$$

$$2x - y + 1 = 0$$

alırıq.

Üçüncü hündürlük $5x + 4y - 17 = 0$ xəttinə perpendikulyardır və

$x + 2y - 1 + \lambda(x + 4y + 11) = 0$ dəstəsinə aiddir. Buradan

$$(1 + \lambda)x + (2 + 4\lambda)y - 1 + 11\lambda = 0$$

olar. Onda bucaq əmsalı $k = -\frac{1+\lambda}{2-4\lambda} = -\frac{1}{-\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$ olduğundan

$$\frac{1+\lambda}{4\lambda-2} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5+5\lambda = 16\lambda-8$$

$$11\lambda = 13$$

$$\lambda = \frac{13}{11}$$

alırıq.

Tənliyi qursaq

$$\left(1 + \frac{13}{11}\right)x + \left(2 - \frac{52}{11}\right)y + 12 = 0$$

$$24x - 30y + 12 \cdot 11 = 0$$

$$4x - 5y + 22 = 0$$

olar.

№20 $2x + 7y - 8 = 0$ və $3x + 2y + 5 = 0$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsindən keçən və $2x + 3y - 7 = 0$ düz xətti ilə 45° -li bucaq əmələ gətirən düz xəttin tənliyini tapın.

Həlli: Düz xətlər dəstəsinin tənliyini yazsaq

$$2x + 7y - 8 + \lambda(3x + 2y + 5) = 0$$

$$(2 + 3\lambda)x + (7 + 2\lambda)y - 8 + 5\lambda = 0$$

$$\text{və ya } y = -\frac{2 + 3\lambda}{7 + 2\lambda}x + \frac{8 - 5\lambda}{7 + 2\lambda}; k_1 = -\frac{2 + 3\lambda}{7 + 2\lambda} \text{ olar.}$$

$$2x + 3y - 7 = 0 \text{ xəttinin bucaq əmsali } k_2 = -\frac{2}{3} \text{ olduğundan}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

düsturundan

$$1 = \left| \frac{-\frac{2}{3} + \frac{2 + 3\lambda}{7 + 2\lambda}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 + 3\lambda}{7 + 2\lambda}} \right| = \left| \frac{6 + 9\lambda - 14 - 14\lambda}{3(7 + 2\lambda)} \right| = \left| \frac{5\lambda - 8}{12\lambda + 25} \right|$$

$$\frac{5\lambda - 8}{12\lambda + 25} = \pm 1$$

alınar. Burada

$$1) 5\lambda - 8 = 12\lambda + 25$$

$$7\lambda = -33$$

$$\lambda = -\frac{33}{7}$$

$$2) 5\lambda - 8 = (12\lambda + 25)(-1)$$

$$17\lambda = -17$$

$$\lambda = -1$$

olmalıdır.

Onda $\lambda = -1$ olduqda

$$(2-3)x + (7-2)y - 8 - 5 = 0 \text{ yaxud } x - 5y + 13 = 0 \text{ olar.}$$

$$\lambda = -\frac{33}{7} \text{ olduqda isə}$$

$$\left(2 - \frac{99}{7}\right)x + \left(7 - \frac{66}{7}\right)y - 8 - \frac{165}{7} = 0$$

yaxud

$$85x + 17y + 221 = 0$$

$$5x + y + 13 = 0$$

tənliyi almır.

№21 Paraleloqramın iki tərəfinin $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ tənlikləri və onun diaqonallarından birinin $3x + 2y + 3 = 0$ tənliyi verilib. Bu paraleloqramın təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

Cavab: $(1; -3)$, $(-2; 5)$, $(5; -9)$ və $(8; -17)$

№22 Düzbucaqlının iki tərəfinin $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ tənlikləri və onun diaqonallarından birinin tənliyi verilir. Düzbucaqlının təpələrini tapın.

Cavab: $(2; 1)$, $(4; 2)$, $(-1; 7)$, $(1; 8)$

№23 Üçbucağın təpə nöqtələri verilir: $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$ və $C(-1; -4)$. Üçbucağın C təpəsindən çəkilmiş medianın və B təpəsinin daxili bucağının tənböləninin tənliklərini qurun.

Cavab: $7x - y + 3 = 0$ və $x + 7y + 4 = 0$

№24 Üçbucağın təpə nöqtələri verilir: $(2; -1)$, $(4; 5)$ və $(-3; 2)$. Bu üçbucağın ağırlıq mərkəzini koordinat başlanğıcı ilə birləşdirən düz xəttin tənliyini qurun.

Cavab: $y = 2x$

№25 Üçbucağın təpə nöqtələri verilib: $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$. Bu təpələrin hər birindən qarşı tərəfə paralel olan düz xətlərin tənliklərini qurun.

Cavab: $3x + 4y - 16 = 0$, $5x + 3y - 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$

№26 $2x - 3y - 3 = 0$ düz xəttinə nəzərən $P(-5;13)$ nöqtəsinə simmetrik olan Q nöqtəsini tapın.

Cavab: $Q(11;-11)$

№27 Üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrinin $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ və $M_3(3;-4)$ koordinatları verilir. Onun tərəflərinin tənliklərini tərtib edin.

Cavab: $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$

№28 Koordinat başlanğıcından düz xəttə endirilmiş perpendikulyarın oturacağı $P(2;3)$ nöqtəsi oalarsa, bu düz xəttin tənliyini qurmalı.

Cavab: $2x + 3y - 13 = 0$

№29 Üçbucağın təpə nöqtələrinin $M_1(2;1)$, $M_2(-1;1)$ və $M_3(3;2)$ koordinatları verilir. Onun hündürlüklərinin tənliyini tərtib edin.

Cavab: $4x + 3y - 11 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$

№30 Üçbucağın təpə nöqtələri verilib: $A(0;2)$, $B(7;3)$ və $C(1;6)$. $\alpha = \angle BAC$ bucağını təyin edin.

Cavab: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{27}{11}$

№31 Üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələri verilib: $A_1(-1;-1)$, $B_1(1;9)$, $C_1(9;1)$. Bu nöqtələrdən keçən və uyğun tərəflərə perpendikulyar olan düz xətlərin tənliklərini qurun.

Cavab: $x - y = 0$, $x + 5y - 14 = 0$, $5x + y - 14 = 0$

№32 $A(2;\sqrt{3})$ və $B(3;2\sqrt{3})$ nöqtələrindən keçən düz xətt ilə ordinat oxu arasında qalan iti bucağı tapın.

Cavab: $\frac{\pi}{6}$

№33 $A(-3;1)$ və $B(3;-7)$ nöqtələri verilib.

Ordinat oxunda elə M nöqtəsi tapın ki, AM və BM düz xətləri perpendikulyar olsun

Cavab: $(0;2)$ və $(0;-8)$

№34 $P(5;2)$ nöqtəsindən keçən düz xətt koordinat oxlarında bərabər parçalar kəsir. Bu düz xəttin tənliyini qurun.

Cavab: $x + y = 7$

№35 $P(8;6)$ nöqtəsindən keçən və koordinat başlanğıcından sahəsi 12 kv.vah. olan üçbucaq ayıran düz xəttin tənliyini tərtib edin.

Cavab: $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$

№36 $A(2;-5)$ nöqtəsi tərəflərindən biri $x - 2y - 7 = 0$ düz xəttinin üzərində yerləşən kvadratin təpə nöqtəsidir. Bu kvadratin sahəsini hesablayın.

Cavab: 5 kv.vah.

№37 $2x - 3y + 6 = 0$ düz xəttinin $M_1(-2;-3)$ və $M_2(1;-2)$ nöqtələri ilə məhdud olan parçanı kəsmədiyini isbat edin.

№38 İki paralel düz xətlər arasındakı d məsafəsini hesablayın.

$$\begin{array}{lll} 1) 3x - 4y - 10 = 0 & 2) 5x - 12y + 26 = 0 & 3) 4x - 3y + 15 = 0 \\ 6x - 8y + 5 = 0 & 5x - 12y - 13 = 0 & 9x - 6y + 25 = 0 \end{array}$$

Cavab: 1) $d = 2,5$ 2) $d = 3$ 3) $d = 0,5$

№39 $x + 6y + 5 = 0$ və $3x - 2y + 1 = 0$ düz xətlərin kəsişmə nöqtəsindən və $M\left(-\frac{4}{5}; 1\right)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini qurun.

Cavab: $5x + 4 = 0$

№40 $x + 2y + 3 = 0$ və $2x + 3y + 4 = 0$ düz xətlərin kəsişmə nöqtəsindən keçən və $5x + 8y = 0$ düz xəttinə paralel olan düz xəttin tənliyini qurun.

Cavab: $5x + 8y + 11 = 0$

V FƏSİL

MÜSTƏVİ ÇEVİRİLMƏLƏRİNƏ AİD MİSALLAR

M1 Düzbucaqlı koordinat sistemində $\vec{a} = (-1; 4)$ vektoru ilə təyin olunan paralel köçürmə çevirməsinin analitik ifadəsini təyin edin.

Həlli: Düzbucaqlı koordinat sistemində paralel köçürmə çevirməsinin analitik ifadəsi

$$x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0$$

şəklində olur. Bu düsturlarda $\vec{a}$ vektorunun koordinatlarını yerinə yazsaq,

$$x' = x - 1, \quad y' = y + 4.$$

Bu, tələb edilən düsturlar olar.

M2 Müstəvi $M(2;3)$ nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönmüşdür, belə ki, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. Bu dönmə zamanı $x + 2y - 3 = 0$ düz xəttinin çevrildiyi düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Müstəvinin $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönmənin analitik ifadəsi

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0$$

şəklindədir. Məsələnin şərtində verilənləri nəzərə alsaq bu düsturlar aşağıdakı kimi yazılar.

$$x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2, \quad y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 3$$

Axırncı düsturlarla (x, y) dəyişənlərini x', y' vasitəsi ilə ifadə etsək

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{6}{5}, \quad y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - \frac{17}{5}$$

alırıq. x, y -in bu qiymətlərini məsələnin şərtində verilmiş düz xətt tənliyində yerinə yazsaq

$$11x' + 2y' - 43 = 0$$

alırıq. Bu, axtarılan düz xəttin tənliyidir.

M3 $x' = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}y - 1$, $y' = -\frac{8}{5}x + \frac{5}{6}y + 1$ oxşar çevirmə zamanı $x + y - 1 = 0$ düz xəttinin çevrildiyi düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli: Oxşar çevirmənin şərtində verilmiş analitik ifadəsindən istifadə edərək (x, y) dəyişənlərini (x', y') dəyişənləri ilə ifadə etsək,

$$x = \frac{3}{10}x' - \frac{4}{10}y' + \frac{7}{10}, \quad y = \frac{4}{10}x' + \frac{3}{10}y' + \frac{1}{10}$$

alırıq. x, y -in bu qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$\left(\frac{3}{10}x' - \frac{4}{10}y' + \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}x' + \frac{3}{10}y' + \frac{1}{10}\right) - 1 = 0$$

olar. Buradan $7x' - y' - 2 = 0$ alınır.

M4 $x' = 7x - y + 1$, $y' = 4x + 2y + 4$ afin çevirməsinin ikiqat düz xətlərini tapın.

Həlli: Tutaq ki,

$$Ax' + By' + C = 0 \tag{1}$$

düz xətti verilmiş afin çevirməsinin ikiqat düz xəttin proobrazıdır. Onda

$$A(7x - y + 1) + B(4x + 2y + 4) + C = 0$$

və ya

$$(7A + 4B)x + (-A + 2B)y + (A + 4B + C) = 0 \tag{2}$$

axtarılan düz xəttin tənliyi olar.

Məlumdur ki, (2) düz xətti verilmiş afin çevirməsinin ikiqat düz xətti olması üçün

(1) tənliyi ilə (2) tənliyinin əmsalları mütənəsib olmalıdır. Ona görə də

$$\begin{cases} 7A+4B=\lambda A \\ -A+2B=\lambda B \\ A+4B+C=\lambda C \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} (7-\lambda)A+4B=0 \\ -A+(2-\lambda)B=0 \\ A+4B+(1-\lambda)C=0 \end{cases} \quad (3)$$

bərabərliklərini yazmaq olar. A və B əmsalları eyni zamanda sıfıra bərabər olmadığına görə (3) sisteminin birinci iki tənliyinə əsasən

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{və ya} \quad \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0 \quad (4)$$

yazmaq olar. Burada $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ (4) tənliyinin kökləridir. (3) sisteminin birinci iki tənliyindən istifadə edərək $A:B$ nisbətini tapmaq olar.

$$\begin{aligned} (7-6)A+4B=0 &\Rightarrow A=-4B \Rightarrow A:B=-4 \\ -A+(2-3)B=0 &\Rightarrow -A=B \Rightarrow A:B=-1 \end{aligned}$$

(3) sisteminin axırıncı tənliyindən istifadə edərək C -ni tapa bilərik.

$$C = \frac{A+4B}{\lambda-1}.$$

$$\text{İndi } Ax+By+C=0 \quad \text{və ya} \quad Ax+By+\frac{A+4B}{\lambda-1}=0$$

tənliyindən istifadə edərək

$$\lambda=6 \quad \text{olduqda} \quad Ax+By+\frac{A+4B}{6-1}=0 \Rightarrow A\left(x+\frac{1}{5}\right)+B\left(y+\frac{4}{5}\right)=0 \quad \text{yaza} \quad \text{bilərik.}$$

$A:B=-4$ olduğundan

$$-4\left(x+\frac{1}{5}\right)+\left(y+\frac{4}{5}\right)=0 \Rightarrow -4x-\frac{4}{5}+y+\frac{4}{5}=0 \Rightarrow 4x-y=0$$

olar.

$A=3$ olduqda $Ax+By+\frac{A+4B}{2}=0$, $A\left(x+\frac{1}{2}\right)+B(y+2)=0$ tənliyi alınır. Əgər $A:B=-1$

olarsa, $2x-2y-3=0$ olar. Deməli, $4x-y=0$ və $2x-2y-3=0$ verilmiş afin çevirməsinin ikiqat düz xətləridir.

№5 Verilmiş $A(7;-5)$ nöqtəsinin koordinatlarını koordinat başlanğıcı $O_1(2;3), O_2(-4;7), O_3(-1;-2)$ nöqtələrinə köçürüldükdə təyin edin.

Cavab: $A_1(5;-8), A_2(11;-12), A_3(8;-3)$

№6 $A(1;2)$ nöqtəsi verilmişdir. Koordinat başlanğıcı $O'(-1;3)$ nöqtəsinə köçürüldükdə B -nin yeni sistemdə koordinatları $B(2;-1)$ olarsa A və B nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

Cavab: $d=0$

№7 Verilmiş $A(\sqrt{8};-1)$ və $M(x,y)$ nöqtələrinin koordinatlarını koordinat oxları koordinat bucaqlarının tən bölgələri ilə əvəz edildikdə hesablayın.

Cavab: $A\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right), M\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}};\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$

№8 Nöqtənin koordinatları $xy+3x-2y-6=0$ tənliyini ödəyirsə, koordinat başlanğıcı $O'(2;-3)$ nöqtəsinə köçdükdə hansı tənliyi ödəyər?

Cavab: $x'+y'=0$

№9 Verilmiş $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ çevrəsinə $x-y=3$ düz xəttinə nəzərən simmetrik olan çevrənin tənliyini tapın.

Cavab: $(x-5)^2+(y+2)^2=1$

№10 Verilmiş $M\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$ nöqtəsinin koordinat oxları uyğun olaraq $2x-1=0$ və $x_1-5=0$ düz xətlərinə çevrildikdə yeni koordinatlarını tapın.

Cavab: $M'(3;2)$

№11 Koordinat sisteminin paralel köçürülməsi ilə $9x^2 - 6x - y + 2 = 0$ tənliyini kanonik şəkə gətirin.

Cavab: $y' = 9x'^2$

№12 Hiperbolanın $4xy - y - 2x = 0$ tənliyini $x'y' = m$ şəklinə gətirin.

Cavab: $x'y' = \frac{1}{8}$

№13 Müstəvi $M(-1;3)$ nöqtəsi ətrafında $\alpha = 45^\circ$ bucağı qədər döndür. Bu çevirmə zamanı koordinat oxları hansı düz xətlərə çevrilir.

Cavab: $x' + y' = \sqrt{2}$; $x' - y' = -1$

№14 Verilmiş $\vec{m}$ vektoru AB parçasını $A'B'$ parçasına paralel köçürmənin vektorudursa

1. $AB = A'B'$ və $AB \parallel A'B'$
2. $AB = A'B'$ və onların bir düz xətt üzərində olduğunu isbat edin.

№15 Oxşar çevirmə $x' = x + y - 1$, $y' = -x + y + 1$ tənlikləri ilə verilmişdir. $x + y = 0$ düz xəttinin çevrildiyi düz xətti tapın.

Cavab: $x' + 1 = 0$

№16 Verilmiş $\vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ vektorunun xətti inikas zamanı inikas olduğu vektorun koordinatlarını tapın.

Cavab: $\vec{a} = \{a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1); a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1)\}$

Qeyd: Burada a_1, a_2 və b_1, b_2 xətti çevirmənin əmsallarıdır.

№17 $R = \{i, j, k\}$ koordinat sistemində $\vec{m} = \{2;3\}$ vektoru ilə təyin olunan paralel köçürmə çevirməsinin analitik ifadəsini yazın.

Cavab: $x' = x - 2$; $y' = y - 3$

№18 Koordinat başlanğıcının $O'(1,1)$ köçürülərək koordint oxlarını $\frac{\pi}{4}$ qədər döndərdikdə çevirmə düsturlarını tapın.

Cavab: $x = 1 + \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$; $y = 1 + \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$

№19 Əmsalları uyğun olaraq k_1 və k_2 olan H_1 və H_2 homotetiylarının hasilinin əmsalının $k_1 \cdot k_2$ olduğunu isbat edin.

IX FƏSİL

SƏTH VƏ ONUN TƏNLIYINƏ AİD MİSALLAR

№1 Aşağıdakı halların hər biri üçün sferanın tənliyini yazın:

a) Sfera $A(2; -1; -3)$ nöqtəsindən keçir və mərkəzi $C(3; -2; 1)$ nöqtəsidir.

b) $A(2; -3; 5)$ və $B(4; 1; -3)$ nöqtələri sferanın diametrlərindən birinin uc nöqtələridir.

c) Sferanın mərkəzi $C(3; -5; -2)$ nöqtəsidir və $2x - y - 3z + 11 = 0$ müstəvisi sferaya toxunandır.

Həlli: a) Sferanın radiusu $R = |AC|$

$$R = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

olduğundan sferanın tənliyi

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$$

olacaqdır.

b) Sferanın diametrini tapaq

$$D = |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

onda sferanın radiusu $R = \sqrt{21}$ olar. Sferanın mərkəzi isə $\overline{AB}$ parçasının C orta nöqtəsidir və $C(x_0; y_0; z_0)$ olarsa

$$x_0 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_0 = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad z_0 = \frac{5-3}{2} = 1$$

olacaqdır. Deməli, $C(3; -1; 1)$ sferanın mərkəzidir. Sferanın tənliyi isə

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$$

olar.

c) C nöqtəsindən keçən və müstəviyə perpendikulyar olan düz xəttin tənliyini quraq. Bu düz xəttin yönəldici vektoru $\vec{s} = \{2; -1; -3\}$ olacaq. Deməli, bu xəttin parametrik tənlikləri

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t + 3 \\ y &= -t - 5 \\ z &= -3t - 2 \end{aligned} \right\}$$

şəklində olur. Bu xətt ilə müstəvinin kəsişmə nöqtəsi toxunma nöqtəsi olduğundan nöqtənin koordinatlarını tapaq. Bunun üçün parametrik tənlikləri müstəvinin tənliyində yazaq:

$$2(2t+3) - (-t-5) - 3(-3t-2) + 11 = 0$$

$$4t + 6 + t + 5 + 9t + 6 + 11 = 0$$

$$14t = -28$$

$$t = -2$$

olar. Deməli, kəsişmə nöqtəsinin koordinatları

$$x = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$$

$$y = -2 - 5 = -7$$

$$z = -6 - 2 = -8$$

olar. Sferanın üzərində yerləşən nöqtənin koordinatları $A(-1; -7; -8)$ olduğundan sferanın radiusu

$$R = |AC| \text{ və } R = \sqrt{(3+1)^2 + (-5+3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56}$$

olar. Sferanın tənliyi isə

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 56$$

olacaqdır.

№2 $5x - y + 2z - 17 = 0$ müstəvisinə perpendikulyar olan

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + z - 11 = 0$$

sferanın diametrinin parametrik tənliklərini yazın.

Həlli: Sferanın tənliyindən onun mərkəzini və radiusunu təyin edək:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + z^2 + z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 11 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 21\frac{1}{4}$$

Sferanın mərkəzi $\left(-1; 3; -\frac{1}{2}\right)$ nöqtəsindədir. Onda sferanın

$$5x - y + 2z - 17 = 0$$

müstəvisinə perpendikulyar olan diametrinin parametrik tənlikləri

$$x = 5t - 1$$

$$y = -t + 3$$

$$z = 2t - \frac{1}{2}$$

olacaqdır.

№3 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ ellipsoidinin baş kəsiklərini tapmalı, onun təpə nöqtələrini və oxlarının uzunluğunu təyin etməli.

Həlli: Səthin (xy) müstəvisi ilə kəsişmə xəttini tapaq

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Bu isə $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsi olacaqdır.

(yz) müstəvisindəki baş kəsiyi isə

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ və ya } \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

ellipsidir.

(xz) müstəvisindəki baş kəsiyi isə

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ və ya } \frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

ellipsidir.

Ellipsoidin təpələri $A_1(6; 0; 0)$, $A_2(-6; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $B(0; -4; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $C(0; 0; -3)$, nöqtələridir. Oxların uzunluqları isə $2a = 12$, $2b = 8$, $2c = 6$ olar.

№4 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ellipsoidi ilə $x + 4z - 4 = 0$ müstəvisinin kəsişmə xəttinin (xy) müstəvisi üzərində proyeksiyasını tapmalı.

Həlli:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \\ x + 4z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 1 + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{2} = 1 \\ z = 1 - \frac{x}{4} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} - \frac{x}{2} = 0$$

Onda $x^2 - 4x + 2y^2 = 0$ xəttini alırıq. Bu xəttin (xy) müstəvisinə proyeksiyası isə

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 4x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ellipsidir.

№5 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = y$ hiperbolik paraboloidin $3x - 3y + 4z + 2 = 0$ müstəvisi ilə kəsişmə xəttini müəyyən edin və bu xəttin mərkəzini tapın.

Həlli:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y \\ 3x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

Sistemindən y dəyişənini yox edək. Onda

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} \\ y = x + \frac{4}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$$

olduğundan $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = x + \frac{4}{3}z + \frac{2}{3}$ və ya $\frac{x^2}{2} - x - \frac{z^2}{3} - \frac{4}{3}z - \frac{2}{3} = 0$

alırıq. Buradan

$$3x^2 - 6x + 3 - 3 - 2z^2 - 8z - 8 + 8 - 4 = 0$$

$$3(x-1)^2 - 2(z+2)^2 + 1 = 0 \quad \text{və ya}$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(z+2)^2}{\frac{1}{2}} = -1$$

hiperbolanın tənliyi alınır. Onda

$$x_0 = 1, y_0 = x_0 + \frac{4}{3}z_0 + \frac{2}{3}, z_0 = -2 \quad \text{və ya}$$

$$x_0 = 1, y_0 = 1 - \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = 1 - 2 = -1, z_0 = -2$$

alırıq. Deməli, kəsişmə xətti yarımoxları $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ və $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ mərkəzi $(1; -1; -2)$

olan hiperboladır.

№6 Təpəsi $M(0;0;1)$ nöqtəsində yerləşən və yönəldicisi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

ellipsi olan konusun tənliyini yazın.

Həlli: Konusun AM doğuranının tənliyini yazaq, burada $A(x_0, y_0, z_0)$

ellipsin üzərində yerləşən nöqtədir. Tənlik $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z-1}{-1}$ olar. A nöqtəsinin

koordinatları ellipsin tənliyini

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1, z_0 = 3$$

ödəyir. Bu sistemdən x_0, y_0 və z_0 yox edərək, konusun tənliyi

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{4} = 0$$

şəklində alırıq.

№7 Yönəldicisi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

ellipsi olan və doğuranının istiqaməti $a_1 : a_2 : a_3 = 5 : 3 : 2$ nisbəti ilə verilmiş silindirin tənliyini yazın.

Həlli: Silindirin doğuranının tənliyini

$$\frac{x-x_0}{5} = \frac{y-y_0}{3} = \frac{z}{2}$$

şəklində yazmaq olar. Bu tənlikdən və silindirin yönəldicisinin tənliyindən istifadə edib x, y, z dəyişənlərini islah etsək

$$x_0^2 + y_0^2 = 25$$

alırıq. Doğuranın tənliklərinə əsasən

$$\begin{aligned} x_0 &= x - \frac{5}{2}z \\ y_0 &= y - \frac{3}{2}z \end{aligned}$$

olar. Bunları x_0 və y_0 -dan asılı olan sonuncu tənlikdə yerlərinə yazsaq

$$\left(x - \frac{5}{2}z\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}z\right)^2 = 25 \quad \text{və ya}$$

$$4x^2 + 4y^2 + 34z^2 - 20xz - 12yz - 100 = 0$$

alınır.

№8 $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ konusunun a) $y=3$, b) $z=1$, c) $x=0$ müstəviləri ilə kəsişmə xətlərini tapın.

Həlli:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

tənliklərini birgə həll etsək

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

çevrəsini təyin edərək.

$$b) \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

tənliklərini birgə həll etsək

$$x^2 - y^2 = -1 \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} y^2 - x^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

hiperbolasını təyin edərək.

c) Eyni qayda ilə

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} z^2 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

iki düz xətti təyin edirik.

N9 $x + 2y = 4, z = 0$ düz xəttinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthi təyin edin.

Həlli: Fırlanma səthi təpə nöqtəsi $M(4;0;0)$ olan konik səthdir. Səthin ixtiyari $A(X;Y;Z)$ nöqtəsini götürək. Bu nöqtəyə düz xəttin $B(x;y;0)$ nöqtəsi uyğundur. A və B nöqtələri fırlanma oxuna perpendikulyar olan bir müstəvidə yerləşirlər. x və y -in qiymətlərini düz xəttin tənliyində yerinə yazsaq, həmin səthin tənliyini

$$\begin{aligned} X + 2\sqrt{Y^2 + Z^2} &= 4 \\ 4(Y^2 + Z^2) - (X - 4)^2 &= 0 \\ 4Y^2 + 4Z^2 - (X - 4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

şəklində alırıq.

N10 Aşağıdakı tənliklə təsvir edilən əyrini və onun mərkəzini müəyyən edin.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}$$

Həlli: Verilən sistemdən z dəyişərini yox edək.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z \\ 2z = -x + \frac{y}{3} + \frac{14}{3} \end{cases}$$

Buradan

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} + x - \frac{y}{3} - \frac{14}{3} = 0 \quad \text{və ya} \quad 2x^2 + y^2 + 6x - 2y - 28 = 0$$

tənliyini alırıq. Buradan isə

$$2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + y^2 - 2y + 1 - 1 - 28 = 0$$

və ya

$$2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 29 + \frac{9}{2}$$

$$\frac{4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{67} + \frac{2(y-1)^2}{67} = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{67}{4}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{67}{2}} = 1$$

tənliyini alırıq. Bu tənlik ellipsin tənliyidir. Əgər

$$x_0 = -\frac{3}{2}, \quad y_0 = 1$$

olarsa

$$z_0 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{6} + \frac{14}{6} = \frac{3}{4} + \frac{15}{6} = \frac{9+30}{12} = \frac{39}{12} = 3\frac{1}{4}$$

olduğundan ellipsin mərkəzi $\left(-\frac{3}{2}; 1; 3\frac{1}{4}\right)$ nöqtəsi olar.

№11 Radiusu $r = 3$ olan və $x + 2y + 2z + 3 = 0$ müstəvisinə $M(1; 1; -3)$ nöqtəsində toxunan kürənin tənliyini yazın.

Cavab: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ və

$$x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$$

№12 İki paralel $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $6x - 3y - 2z + 63 = 0$ müstəvilərinə toxunan və bunlardan birinə $M_1(5; -1; -1)$ nöqtəsində toxunan kürənin tənliyini yazın.

Cavab: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

№13 $x - 2 = 0$ müstəvisinin $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ ellipsoidini ellips üzrə kəsiyini müəyyən edin. Ellipsin yarımoxlarını və təpələrini tapın.

Cavab: $4; 3; (4; 0; -1); (-4; 0; -1)$

№14 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ ellipsoidinin $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ müstəvisi ilə kəsişmə xəttini müəyyən edin və onun mərkəzini tapın.

Cavab: Ellips; $(2; -1; 1)$ nöqtəsi isə ellipsin mərkəzidir.

№15 Verilmiş tənliklərin hansı xətti təyin etdiyini müəyyən edin və bu xətlərin hər birinin mərkəzini tapın.

$$1) \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 \\ 9x - 6y + 2z - 28 = 0 \end{cases}$$

Cavab: 1) $\left(-\frac{3}{2}; 1; \frac{13}{4}\right)$ nöqtəsi ellipsin mərkəzidir.

2) parabola mərkəzi yoxdur.

3) parabola, $(2; -3; -4)$ nöqtəsi hiperbolanın mərkəzidir.

№16 m -in hansı qiymətlərində $x + mz - 1 = 0$ müstəvisi

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \text{ ikioyqlu hiperboloidini}$$

a) ellips üzrə

b) parabola üzrə kəsdiyini müəyyənləşdirin.

Cavab: a) $1 < |m| < \sqrt{2}$; b) $|m| < 1$

№17 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ ellipsoidinin $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ müstəvisi ilə bir ortaq nöqtəsi olduğunu isbat edin və onun koordinatlarını tapın.

Cavab: (6; -2; 2)

№18 $x - 2y + 2z + 17 = 0$ müstəvisinə paralel olan

$$4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$$

ellipsoidinə toxunan müstəviləri keçirin; tapılmış müstəvilər arasındakı məsafəni hesablayın.

Cavab: $x - 2y + 2z - 1 = 0$; $x - 2y + 2z + 1 = 0$; $\frac{2}{3}$.

№19 İsbat edin ki, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tənliyi ilə təyin olunan ikiyözlü hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$ hiperbolasının Oz oxu ətrafında fırlanmasından və fəzanın OXZ müstəvisinə sonrakı müntəzəm sıxılması nəticəsində alınır.

№20 İsbat edin ki, $2x - 12y - z + 16 = 0$ müstəvisi $x^2 - 4y^2 = 2z$ hiperbolik paraboloidi düz xətlı doğuranlar üzrə kəsir. Bu düz xətlı doğuranların tənliyini yazın.

Cavab: $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

№21 Koordinat başlanğıcı (3; 0; 1) nöqtəsinə köçürüldükdə

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4zx - 2x - 10y + 4z = 0$$

səthinin tənliyini yazın.

Cavab: $x'^2 + 5y'^2 + 4z'^2 + 4x'y' - 2y'z' - 4z'x' - 1 = 0$

№22 Verilmiş səthlərin hər birinin mərkəzini tapın və formasını təyin edin.

1) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 6yz - 4zx - 8x - 10y = 0$

2) $3x^2 + 2y^2 + 4yz - 2zx - 4x - 8z - 8 = 0$

Cavab: 1) $\left(\frac{14}{3}; 3; \frac{1}{3}\right)$ $\Delta \neq 0$ mərkəzli səth.

2) $(0; 2; -2)$ $\Delta = 0$ konus.

№23 Verilmiş $z^2 + xy - yz - 5x = 0$ səthinin $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7}$ düz xətti ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

Cavab: $M_1(1; 2; 3)$ və $M_2(2; -1; -4)$

№24 Verilmiş $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6yx + 2yz - 2zx - 12 = 0$ səthinin elə düz xətti doğuranlarını tapın ki, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ düz xəttinə paralel olsun.

Cavab: $\frac{x+\sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

№25 Verilmiş $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 2yx - 3yz + 5x - 8 = 0$ səthinin koordinat müstəviləri ilə kəsişmə xəttini tapın.

a) $\begin{cases} z = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 + 2xy + 5x - 8 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 0 \\ 3z^2 - 2yz - z - 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$

№26 Verilmiş $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2yx - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$ səthinin baş istiqamətlərini tapın.

Cavab: $m_1 = n_1 = 0$; $p_1 = 1$; $m_2 = n_2$; $p = 0$; $m_3 = -n_3$; $p_3 = 0$

№27 Aşağıdakı səthlərin formasını tapın.

$$1) 4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 4yx + 12yz = 0$$

$$2) x^2 - 3y^2 + 4zx - 2yz = 0$$

Cavab: 1) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$ düz xətti ilə kəsişən müstəvilər.

2) Təpəsi koordinat başlanğıcında olan konus.

№28 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ ellipsoidinin təpə nöqtələrini və oxlarının uzunluqlarını tapın.

Cavab: $A(6; 0; 0)$ və $A_1(-6; 0; 0)$;

$B(0; 4; 0)$ və $B_1(0; -4; 0)$;

$C(0; 0; 3)$ və $C_1(0; 0; -3)$;

$$2a = 12; \quad 2b = 8; \quad 2c = 6.$$

№29 Verilmiş $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$ konusunun doğuranı ilə fırlanma oxu arasındakı bucağı tapın.

Cavab: $\varphi = \frac{\pi}{6}$

(Göstəriş: həll etmək üçün XOZ müstəvisi ilə kəsiyə baxmalı).

№30 Verilmiş $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ silindirin normallarının hansının bir müstəviyə paralel olduğunu isbat edin.

M Ü N D Ə R İ C A T

Giriş _____	3
I Fəsil. Koordinat sistemləri _____	6
§1. Koordinat sistemləri _____	6
§2. Silindirik və sferik koordinat sistemləri _____	10
§3. Analitik həndəsənin sadə məsələləri _____	13
II Fəsil. Vektor _____	22
§1. Vektorlar və onlar üzərində sadə əməllər _____	22
§2. Vektorlar sistemi _____	30
§3. Vektorlar fəzası. Vektorların bazisə görə ayrılışı _____	34
§4. Vektorun ox üzərində proyeksiyası _____	39
§5. Vektorların uzunluğunun koordinatlarla ifadəsi _____	41
§6. Vektorların skalyar hasili _____	43
§7. İki vektorun skalyar hasilinin koordinatlarla ifadəsi _____	46
§8. İki vektorun vektorial hasili _____	51
§9. Vektorial hasilin koordinatlarla ifadəsi _____	55
§10. Üç vektorun qarışıq hasili _____	58
§11. Qarışıq hasilin koordinatlarla ifadəsi _____	62

§12. İkiqat vektorial hasil	64
III Fəsil. Müstəvidə afin koordinat sistemi	68
§1. Müstəvinin oriyentasiyası	68
§2. Afin koordinat sisteminin afin koordinat sisteminə çevrilməsi	72
§3. Düzbucaqlı koordinat sisteminin çevrilməsi	76
§4. Düzbucaqlı koordinat sisteminin ümumi çevrilməsi	79
IV Fəsil. Müstəvidə düz xətt	82
§1. Müstəvi üzərində düz xətt	82
§2. Düz xətt	83
§3. Düz xəttin ümumi tənliyi	87
§4. Düz xəttin parçalarla tənliyi	90
§5. Düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi	91
§6. Düz xəttin normal tənliyi və nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə	92
§7. Müstəvi üzərində iki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti	97
§8. İki düz xətt arasındakı bucaq	99
§9. Düz xətlər dəstəsi	102
V Fəsil. Müstəvi çevrilmələri	106

§1. İnikas və onun növləri	106
§2. Çevrilmələr qrupu və alt qrup	108
§3. Müstəvidə hərəkət	110
§4. Hərəkətin koordinatlarla ifadəsi	117
§5. Hərəkətlər qrupu və onun alt qrupu	118
§6. Oxşar çevrilmələr	120
§7. Homotetiyanın koordinatlarla ifadəsi	123
§8. Afin çevrilmələri	124
VI Fəsil. İkitərtibli əyrilər	126
§1. Ellips	126
§2. Hiperbola	132
§3. Parabola	136
§4. Ellipsin, hiperbolanın direktrisləri və onun direktrial xassələri	139
§5. Ellips, hiperbola və parabolanın polyar koordinat sistemində tənlikləri	141
§6. İkitərtibli əyrilərin ümumi tənliyi	143
§7. İkitərtibli əyri ilə düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti	145
§8. İkitərtibli əyriyə nəzərən asimptotik istiqamətlər	148

§9. İkitərtibli əyrinin mərkəzi _____	150
§10. İkitərtibli əyrinin toxunamı və diametri _____	153
VII Fəsil. Fəza koordinat sistemləri _____	158
§1. Fəzada afin koordinat sistemi _____	158
§2. Fəzada afin koordinat sisteminin çevrilməsi _____	161
VIII Fəsil. Müstəvi və onun müxtəlif tənlikləri _____	167
§1. Müstəvinin verilmə üsulları _____	167
§2. Müstəvinin ümumi tənliyi _____	170
§3. Müstəvinin ümumi tənliyinin araşdırılması _____	173
§4. Müstəvinin parçalarla tənliyi _____	175
§5. İki müstəvi arasında qalan bucaq _____	176
§6. Müstəvinin normal tənliyi _____	178
§7. Müstəvinin ümumi tənliyinin normal şəklə gətirilməsi _____	181
§8. Nöqtədən müstəviyə qədər məsafə _____	184
§9. Müstəvilər dəstəsi və bağlılığı _____	187
IX Fəsil. Fəzada düz xətt _____	191
§1. Fəzada düz xəttin verilmə üsulları _____	191
§2. Fəzada iki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti _____	199

§3. Düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti	202
X Fəsil. Səth və onun tənliyi	206
§1. Səth anlayışı və onun tənliyi	206
§2. İkitərtibli səthin ümumi tənliyi	207
§3. İkitərtibli səthin mərkəzi	211
§4. Koordinat sisteminin dönməsi vasitəsi ilə səth tənliyinin sadələşdirilməsi	212
§5. İkitərtibli səthin təsnifatı	214
§6. Ellipsoid və onun xassələri	220
§7. Biroyuqlu hiperboloid	223
§8. İkiöyuqlu hiperboloid	227
§9. Paraboloidlər	230
§10. Fırlanma səthləri	236
§11. Silindirik səthlər	244
§12. İkitərtibli konus	249
§13. Konusun kəsikləri	252
§14. İkitərtibli səthlərin düz xətlə doğuranları	254
Koordinat sisteminə aid misallar	258
Vektorlara aid misallar	278

Affin koordinat sistemində aid misallar	304
Müstəvidə düz xəttə aid misallar	318
Müstəvi çevrilmələrinə aid misallar	347
Səth və onun tənliyinə aid misallar	353

Çapa imzalanıb: 07.12.2007

Format 60 x 84 1/16, həcmi 23,25 ç.v.,

tiraj 100, sifariş 06

«Mansur Holding» MMC -də çap olunmuşdur.

Bakı şəh. Azadlıq pr-ti, 89.