eKitabxana

Riyazi modellərin
forma və prinsiplərinin təsviri.

Kompyuter və informasiya texnologiyaları həyatımıza elə daxil olmuşdur ki, insan fəaliyyətinin elə sahəsi yoxdur ki, orada kompyuter istifadə edilməsin. Kompyuterlər yeni qurğu və avadanlıqların layihələndirilməsində, onların işinin təşkilində əvəzsiz rol oynayır. Kompyuterlər indi yeni maşınların yaradılması və onların işinin tədqiqi, yeni avadanlıq və qurğuların texnoloji proseslər və onların optimal variantlarının tapılması, iqtisadi məsələlərin həlli, istehsalın müxtəlif səviyyələrində planlaşdırılması və idarə edilməsi məsələlərinin həllində istifadə edilir.

Kompyuterləri tətbiqi məsələlərin həllində istifadə etməzdən əvvəl tətbiqi məsələ “ formal” riyazi dilə çevrilməlidir, yəni real obyekt, proses və ya sistem üçün onun riyazi modeli qurulmalıdır. Modelləşdirmə hər hansı A obyektin B obyekti ilə əvəz edilməsidir. Əvəz edilən A obyekti original, və ya modelləşmə obyekti, əvəz edən B obyekti isə model adlanır. Bir sozlə model- obyektin əsas əlamətlərinin öyrənilməsinin təmin edilməsidir.

Modelləşdirmə insan fəaliyyətinin müxtəlif sferalarında xüsusilə alınmış informasiya əsasında effektiv qərarların qəbul edilməsinin əhəmiyyətli olduğu layihələndirmə və idarəetmə sahələrində geniş tətbiq edilir.

Model həmişə müəyyən məqsədlə qurulur, belə ki, bu zaman obyektiv hadisənin hansı əlamətlərinin mühüm, hansılarının isə qeyri-mühüm olduğu nəzərə alınır. Model- müəyyən mənada obyektiv reallığın müəyyən bucaq altında proyeksiyasıdır.

Modelləşdirmə nəzəriyyəsinin əsasında oxşarlıq nəzəriyyəsi durur. Modelləşdirmə apardıqda mütləq oxşarlıqdan söhbət gedə bilməz. Lakin bu zaman modelin öyrənilən real obyektin tədqiq edilən tərəflərinin kifayət qədər yaxşı inikas etdirməsinə cəhd edilir.

Bütün modelləri 2 sinfə bölmək olar:

1) həqiqi
2) ideal

Həqiqi modelləri də öz növbəsində

1) təbii
2) fiziki
3) riyazi

olmaqla ayırmaq olar.

İdeal modelləri isə

1) əyani
2) işarə
3) riyazi

modellərinə bölmək olar.

Həqiqi təbii modellər-üzərində elmi texniki və istehsal eksperimentləri aparılan real obyektlər, proseslər və sistemlərdir.

Həqiqi fiziki modellər-originalın fiziki əlamətlərini (kinematik, dinamik, hidravlik, istilik, elektrik) əks olunduğu obyektlərdir.

Həqiqi riyazi modellərə -struktur, həndəsi, qrafik, ədədi və kibernetik modellər aiddir.

İdeal əyani modellərə-sxemlər, xəritələr, çertyojlar, qraflar, struktur və həndəsi modellər aiddir.

İdeal işarə modelləri-əlifba, proqramlaşdırma dilləri, nizamlanmış yazılış, şəbəkə təsvirləri aiddir.

İdeal riyazi modellər-analitik, funksional, initasiya, kombinəedilmiş modellərdir.

Modelləşdirmənin daha universal növü riyazi modelləşdirmədir. Riyazi model-modelləşdirilən fiziki prosesə riyazi münasibətlər sistemini uyğun qoyur.

Riyazi modelləşdirmə -real obyektiv proses və sistemin müasir informasiya texnologiyalarının, EHM-nın köməyilə eksperimental araşdırma üçün daha əlverişli olan riyazi modellə əvəz olunması vasitəsidir.

Riyazi model - obyektin, prosesin və sistemin əsas əlamətlərinin, onun parametrlərinin daxili və xarici əlaqələrinin məntiqi-riyazi münasibətlərinin köməyi ilə təsviridir.

Ümumi halda real obyektin, prosesin və sistemin riyazi modelləri

$$\Phi_i(X,Y,Z,t)=0$$

kimi vermək olar. Burada

X – giriş dəyişənləri vektoru $X=(x_1,x_2,...x_N)^t$

Y -çıxış dəyişənləri vektoru $Y=(y_1,y_2,...y_M)^t$

Z -xarici təsirlər vektoru $Z=(z_1,z_2,...z_L)^t$

t – zaman koordinatıdır.

Qurulma prinsiplərinə görə riyazi modellər aşağıdakı modellərə bölünür:

1) analitik
2) imitasion

Analitik modellərdə real obyektlərdə baş verən proseslər aşkar funksional asılılıqlar şəklində verilir.

Analitik modellər isə öz növbəsində riyazi problemdən asılı olaraq müxtəlif tiplərə bölünür:

1. tənliklər (cəbri, transendent, differensial, inteqral)
2. aproksimasiya məsələləri (interpolyasiya, ekstropolyasiya, ədədi inteqrallama və differensiallama)
3. optimallaşdırma məsələləri
4. stoxastik problemlər

Lakin modelləşdirilən obyekt mürəkkəbləşdikcə onun analitik modelinin qurulması mürəkkəbləşir.

Belə olduqda imitasiya modelindən istifadə etmək ehtiyacı yaranır. İmitasion modelləşdirmə ilkin verilənlər əsasında (prosesin və sistemin) müəyyən zaman anlarında vəziyyəti haqqında məlumat almağa imkan verir, lakin bu zaman sistemin vəziyyətinin proqramlaşdırılması bir qədər çətin olur.

Öyrənilən real proses və sistem xarakterindən asılı olaraq model determinik və stoxastik ola bilər. Determinik modellərdə hər cür təsadüfi təsir yoxdur, modelin elementləri-dəyişənlər, riyazi əlaqələr dəqiq təyin olunur. Determinik modelləri qurarkən daha çox cəbri tənliklər, inteqral tənliklər, matrislər cəbrindən istifadə edilir.

Stoxastik model-oyrənilən obyekt və sistemin proseslərində təsadüfiliyi nəzərə alır. Bu modellər ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üsulları ilə təsvir edilir.

Giriş informasiyasına görə modellər kəsilməz və diskret olur. Əgər informasiya və parametrlər kəsilməz, riyazi əlaqələr dayanıqlıdırsa onda model kəsilməz olur. Əgər əksinə informasiya və parametrlər diskret, əlaqələr isə dayanıqsızdırsa, onda riyazi model diskret olur.

Zaman amilinin nəzərə alınmasına görə modellər statik və dinamik olur.
Statik modellər obyekti, sistemi hal hazırkı zaman anında, dinamik modellər isə müəyyən zaman ərzində təsvir edir.

Real obyektlə riyazi modelin uyğunluq dərəcəsinə görə modelləri izomorf və homomorf olmaqla qruplaşdırmaq olar.(İzomorf-formaya görə eyni, homomorf-formaya görə fərqli)

Əgər model və real obyekt proses və sistem arasında hər bir element üzrə tam uyğunluq olarsa, onda model izomorf adlanır. Əgər obyekt və modelin yalnız daha əhəmiyyətli elementləri arasında uyğunluq olarsa, belə model homomorf adlanır.

Riyazi modeli qurmaq üçün

1. Real obyekt və proses əsaslı şəkildə analiz edilməli;
2. Onun daha əhəmiyyətli olan əlamət və xüsusiyyətləri seçilməli;
3. Obyektin əsas əlamət və xüsusiyyətlərinə təsir edən parametrlər, dəyişənlər müəyyən edilməli;
4. Obyektin əsas əlamətlərinin dəyişənlərin qiymətlərindən asılılıqları məntiqi-riyazi münasibətlər (tənliklər, bərabərliklər, bərabərsizliklər, məntiqi-riyazi konstruksiyalar) şəklində ifadə edilməli;
5. Obyektin daxili əlaqələri ayırd edilməli və məntiqi-riyazi münasibətlər şəklində göstərilməli;
6. Obyektin xarici əlaqələri öyrənilməli və məhdudiyyətlər, tənliklər, bərabərlik və bərabərsizliklər, məntiqi-riyazi konstruksiyalar şəklində ifadə edilməlidir.

Xətti proqramlaşdırma məsələsinin qoyuluşu

Çoxölçülü optimallaşdırma məsələsinin öyrənilməsini xətti proqramlaşdırma məsələsi ilə başlayaq.

Xətti proqramlaşdırma məsələsi xətti proqramlaşdırmanın xətti məhdudiyyətlər şərti daxilində ekstremumunun tapılmasından ibarətdir. Xətti proqramlaşdırma riyazi proqramlaşdırmanın ən çox geniş tətbiq olunan sahəsidir. Xətti proqramlaşdırma yaranmasına və riyazi tətbiqinə görə 1975-ci ildə Kontoroviç və Kupmans Nobel mükafatına layiq görülmüşdür.

1. **Ümumi şəkildə** qoyulmuş xətti proqramlaşdırma məsələsi aşağıdakı kimidir:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \inf \qquad (1)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad , \quad i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i \quad , \quad i = \overline{m+1,s} \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0, \; j \in I \qquad (5)$$

(1)-(4) ümumi şəkildə qoyulmuş xətti proqramlaşdırma məsələsi adlanır. Burada $c_j, a_{ij}, b_i \quad (i = \overline{1,s}, j = \overline{1,n})$ verilmiş ədədlərdir. c_j, a_{ij} əmsallarından heç olmazsa biri 0-dan fərqlidir.

I - indekslər çoxluğunun alt çoxluğudur:

$I \subset \{1,2,\dots,n\}$

$(1)-(4)$ ümumi şəkildə verilmiş xətti proqramlaşdırma məsələsində məhdudiyyət şərtlərinin bir qismi bərabərlik, bir qismi bərbərsizlik şəklində verilib. Burada bütün məhdudiyyətlik şərtləri bərabərlik və ya bərabərsizlik şəklində verilə bilər:

$m = s$ - bərabərlik

$m = 0$ - bərabərsizlik

(4) şərti dəyişənlərin bir qismi üzərinə “ – “ olmamaq şərtinin qoyulması deməkdir. Burada

$I = \{1,2,\dots,n\}$ olduqda bütün dəyişənlərin üzərinə „ – ” olmamaq şərti və ya I boş çoxluq olduqda heç bir dəyişən üzərinə “ – “ olmamaq şərti qoyula bilər.

Göründüyü kimi xətti proqramlaşdırma məsələsinin 3 forması mövcuddur.

2. bütün məhdudiyyət şərtləri bərabərlik şəklində verildikdə, uyğun xətti proqramlaşdırma məsələsi **kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsi** adlanır.

3. məhdudiyyət şərtləri bərabərsizlik şəklində təyin olunan xətti proqramlaşdırma məsələsi **əsas xətti proqramlaşdırma məsələsi** adlanır.

Xətti proqramlaşdırma məsələlərini daha yığcam formada yazmaqdan ötrü aşağıdakı işrələmələri daxil edək:

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor \quad i = \overline{1,m}\,; \qquad j = \overline{1,n}$$

$$\overline{A} = \lfloor a_{ij} \rfloor \quad i = \overline{m+1,s}\,; \qquad j = \overline{1,n}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}; \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_{m+1} \\ . \\ . \\ . \\ b_s \end{bmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$c = (c_1, c_2, ..., c_n)$

Bu işarələmələr daxilində ümumi xətti proqramlaşdırma məsələsi

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \inf, \qquad x \in X = \left\{ x \in R^n : x_j \geq 0, j \in I, Ax = b, \bar{A}x = \bar{b} \right\} \tag{5}$$

Əsas xətti proqramlaşdırma məsələsi

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \inf, \qquad x \in X = \left\{ x \in R^n : x \geq 0, Ax \leq b \right\} \tag{6}$$

Kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsi

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \inf \qquad x \in X = \left\{ x \in R^n : x \geq 0, Ax = b \right\} \tag{7}$$

şəklində olacaq.

Qeyd edək ki, kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsi daha çox tədqiq olunan məsələdir və bir çox üsullar xətti proqramlaşdırma üçün yaradılmışdır.

Praktikada tez-tez əsas xətti proqramlaşdırma məsələsinə rast gəlinir. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin bu 3 forması ekvivalentdir.

Bunu əsas və kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsi əsasında göstərək:

Tutaq ki, (7) xətti proqramlaşdırma məsələsi verilib:

$Ax = b$ tənliklər sistemini $\begin{matrix} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{matrix}$ şəklində göstərməklə, kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsini əsas xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək olar. Indi də əksini fərz edək. Tutaq ki, (6) əsas xətti proqramlaşdırma məsələsi verilmişdir: $y = b - Ax, \quad y \geq 0, \quad y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ daxil etməklə əsas xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirmək olar:

Sadə çevrilmələrin köməyilə xətti proqramlaşdırma məsələlərinin bir formasından digərinə keçdik. Asanlıqla isbat etmək olar ki, bu məsələlər eynigüclüdür.

Tutaq ki, x_* (6) məsələsinin həllidir. Başqa sözlə,

$$\langle c, x_* \rangle \leq \langle c, x \rangle, \quad \forall x \in X$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, z_* da (7)-nin həllidir:

$$\langle d, z_* \rangle = \langle c, x_* \rangle \leq \langle c, x \rangle = \langle d, z \rangle, \quad \forall z \in Z \text{ üçün}$$

$$\langle d, z_* \rangle \leq \langle d, z \rangle$$

Xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilən iqtisadi modellər

Rasion haqqında məsələ

Tutaq ki, n sayda ərzaq məhsulu var. Bu ərzaq məhsulunda m sayda komponentlər (vitaminlər) vardır. Bu ərzaq məhsulundan elə rasion (yemək norması) düzəltmək tələb olunur ki, ucuz başa gəlsin və zəruri komponentləri özündə saxlamış olsun. Baxılan məsələnin riyazi modelini verməkdən ötrü aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

c_j ilə $j=\overline{1,n}$-cu növ ərzaq məhsulunun 1 miqdarının qiymətini, a_{ij}-lə $j=\overline{1,n}$-ci ərzaq məhsulunun 1miqdarında $i=\overline{1,m}$-ci komponentin miqdarını, b_i ilə $i=\overline{1,m}$-ci komponentə olan tələbin miqdarını, x_j-lə ($j=\overline{1,n}$) bu yemək normasını hazırlamaqdan ötrü tələb olunan j-cu növ ərzağın miqdarını işarə etsək, rasion haqqında məsələni riyazi olaraq aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \inf \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i=\overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \; j=\overline{1,n} \qquad (3)$$

Rasion haqqında məsələ (1)-(3) əsas xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir.

Istehsalın optimal planlaşdırılması məsələsi.

Fərz edək ki, istehsal müəssisəsində m sayda xammal var. Bu xammaldan istifadə edərək n növdə məhsul istehsal olunur. Isthsalın optimal planlaşdırılması məsələsində isthsalı elə təşkil etmək tələb olunur ki, (mövcud xammal ehtiyacı daxilində) müəssisənin gəliri maksimum olsun. Məsələnin riyazi qoyuluşunu verməkdən ötrü aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

c_j ilə $j=\overline{1,n}$-cu növ məhsulun 1 miqdarının istehsalında müəssisənin əldə etdiyi gəliri; a_{ij}-ilə $j=\overline{1,n}$-cu növ məhsulun 1 miqdarının istehsalında tələb olunan i-ci növ xammalın miqdarını; b_i-lə müəssisədə olan i-ci növ xammalın miqdarını; x_j ilə j-cu növ məhsulun istehsalının planlaşdırılan miqdarını işarə etsək, bu işarələrdən istifadə etsək məsələ aşağıdakı kimi qoyulur:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m} \qquad (5)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (6)$$

Nəqliyyat məsələsi

Tutaq ki, m sayda anbarda müəyyən miqdarda yük var. Bu yükə tələbi olan n sayda tələb məntəqəsi var. Nəqliyyat məsələsi anbarda olan yükün tələb məntəqəsinə daşınmasının elə təşkilindən ibarətdir ki, yükün hamısı daşınmış olsun, T məntəqəsinin yükə olan tələbi ödənsin və daşınma xərci minimum olsun. Baxılan məsələnin riyazi qoyuluşunu verməkdən ötrü aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

c_{ij}, $(i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n})$ i-ci növ yükün 1 miqdarının j-cu tələb məntəqəsinə daşınmasına çəkilən xərc;

x_{ij}, $(i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n})$ ilə i-ci növ yükün j-cu tələb məntəqəsinə daşınmasına planlaşdırılan yükün miqdarı;

a_i, $(i=\overline{1,m})$ ilə i-ci anbarda olan yükün miqdarı;

b_j ilə j-cu tələb məntəqəsinin yükə olan tələbinin miqdarını işarə etsək, baxılan məsələni riyazi şəkildə aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \inf \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,n} \tag{9}$$

$$x_j \geq 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n} \tag{10}$$

Nəqliyyat məsələsi kanonik (7)-(10) xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir.

İstehsalın balans modeli

Tutaq ki, iqtisadi sistem n sayda $P_1, P_2, ..., P_n$ obyektlərindən ibarətdir və hər bir obyektin istehsal etdiyi məhsul müəyyən x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ miqdarındadır. Verilmiş miqdarda məhsul istehsal etmək üçün P_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ obyekti digər obyektlərdən lazımi miqdarda xammal və hazır məhsul və ya yarımfabrikat ala bilər. Bu tələb istehsalın komplektləşdirilməsi adlanır.

İstehsalı k dəfə artırmaq üçün bütün komplektləri k dəfə artırmaq lazımdır. Bu şərt xəttilik adlanır.

Hər bir obyektin istehsal etdiyi məhsul bu obyektdə və sistemin digər obyektlərində istifadə oluna bilər, nəticədə müəyyən miqdar məhsul "artıq" qalır. Bu məhsul "sərbəst məhsul" adlanır.

Fərz edək ki, P_i obyektinə uyğun sərbəst məhsul y_i miqdarındadır. P_j-nin 1 vahid məhsul istehsal etməsi üçün P_i-dən aldığı məhsul miqdarını a_{ij} ilə işarə edək. Bu əmsallar birbaşa məsrəf əmsalları, yaxud texnoloji əmsallar adlanır.

Texnoloji əmsallara əsasən

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

birbaşa məsrəf, yaxud texnoloji əmsallar matrisi adlanır. Burada $a_{ij} \geq 0$.

$$Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

vektorlarını daxil edək.

P_i obyekti x_i miqdarında məhsul buraxmaq üçün P_j-dən $a_{ij}\ x_j$ qədər, bütün obyektlərdən isə $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ qədər məhsul alır, bundan əlavə y_i qədər sərbəst məhsula malik olmalıdır. Bütün bunları ümumiləşdirsək P_i obyektinin məhsuluna ümumi tələb

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i$$

qədər olar.

Bu obyektin ümumi məhsul buraxılışı x_i olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = x_i, \quad i=\overline{1,n}$$

bərabərliyi alınır və ya matris şəklində

$$AX + Y = X \qquad (1)$$

yaza bilərik. Bu münasibətdə A matrisi və Y vektoru məlumdur, X isə axtarılan vektordur. (1) tənliklər sistemini

$$(I-A)X = Y \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar:

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutaq ki, $(I-A)^{-1}=S$ matrisi var , onda $X=Sy$ bərabərliyindəki S matrisi elə olmalıdır ki, $X \geq 0$.

Misal 1: $A=\begin{pmatrix} 1.1 & 0.2 \\ 0.7 & 1.4 \end{pmatrix}$ matrisi üçün (2) tənliklər sistemini araşdıraq.

Həlli: $I-A=\begin{pmatrix} -0.1 & -0.2 \\ -0.7 & -0.4 \end{pmatrix}$ matrisi üçün $\det(I-A)=0.04-0.14=-0.1 \neq 0$ olduğundan $S=(I-A)^{-1}$ tərs matrisi var və $(I-A)X=Y \Rightarrow \begin{cases} -0.1x_1 - 0.2x_2 = y_1 \\ -0.7x_1 - 0.4x_2 = y_2 \end{cases}$ tənliklər sisteminin yeganə həllinin varlığı $Y=(y_1,y_2)$ vektorundan asılı deyil. Bu sistemin tənliklərini toplasaq

$$-0.8x_1-0.6x_2=y_1+y_2$$
$$-0.2(4x_1+3x_2)=y_1+y_2$$

Tərif: Birbaşa məsrəf matrisi üçün elə $X>0$ istehsal vektoru varsa, onun üçün $AX<X$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda belə A matrisi məhsuldar adlanır.

Bu bərabərsizliyin iqtisadi mahiyyəti ondan ibarətdir ki, obyektin heç olmazsa bir fəaliyyət rejimində sərf olunan məhsulun miqdarı buraxılan məhsul miqdarından azdır.

Teorem: İxtiyari kvadrat $A\ge 0$ matrisi üçün aşağıdakı hökmlər eynigüclüdür:

1. A məhsuldar matrisdir;
2. İxtiyari $Y>0$ vektoru üçün elə yeganə $X>0$ vektoru var ki, $X-AX=Y$ doğrudur;
3. A matrisinin məxsusi λ_A ədədləri $\lambda_A=\lambda_{\max}<1$;
4. $I-A$ matrisinin bütün baş minorlari müsbətdir.

Bu teorem o deməkdir ki, sadalanan mühakimələrin hər hansı birinin doğruluğundan digərləri alınır.

Misal2. İstehsal prosesi aşağıdakı matrislə verilmiş həllinin varlığını araşdıraq:

$$A=\begin{bmatrix}1/3 & 1/2\\ 1/12 & 1/4\end{bmatrix}$$

Həlli: Matrisin məxsusi ədədləri $\begin{vmatrix}\frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4}-\lambda\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=0$

bərabərliyindən tapılır. Onda

$$\lambda^2-\frac{7}{12}\lambda+\frac{1}{24}=0$$

$$\lambda_{12}=\frac{7}{24}\pm\frac{5}{24};\ \ \lambda_1=\frac{1}{12};\ \ \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

$\lambda_{\max}=\frac{1}{2}<1$ olduğundan A məhsuldar matrisdir.

Baxılan misala uyğun olaraq müəyyən $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ sərbəst məhsul vektoruna baxaq. Onda

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

Bərabərliyindən

$$\begin{cases}x_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2=y_1\\ x_2-a_{21}x_1-a_{22}x_2=y_2\end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıq və deməli

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = y_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = y_2 \end{cases}$$

Əgər A məhsuldar matris olarsa, bu sistemin ixtiyari $Y > 0$ üçün həlli vardır.

Misal 3.

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ verilənlərinə görə X məhsul buraxılışını tapın.

Həlli: Əvvəlki misalda gördük ki, $\lambda_{\max} = \frac{1}{2} < 1$ və A məhsuldar matrisdir. Onda $(I - A)X = Y$ münasibətindən istifadə edərək:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 4 \\ -\frac{1}{12}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 5 \end{cases}$$

olar. Bu sistemin birinci tənliyini $\frac{3}{2}$ – ə vurub, ikinci ilə toplasaq, $\left(1 - \frac{1}{12}\right)x_1 = 11$, $x_1 = 12,\ x_2 = 8$ tapırıq. Beləliklə $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektoru qədər sərbəst məhsul əldə etmək üçün $x = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ vektoru qədər buraxılış olmalıdır.

Xətti reqressiya modelləri

Tədqiqat məqsədi ilə obyektə girişi və çıxışı olan qutu şəklində baxmaq olar və bu zaman qutunun daxili strukturu nəzərdən keçirilmir. Bu zaman qutuda (obyektdə) baş verən dəyişiklikləri müşahidəçi görə bilmir.

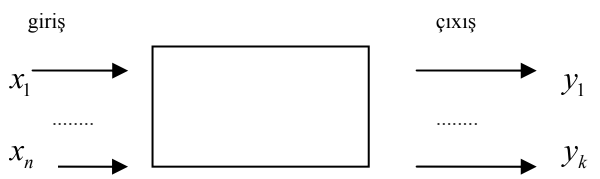
Müşahidəçinin obyekt haqqında informativlik dərəcəsindən asılı olaraq belə obyektləri 3 cür "qutu" şəklində vermək olar:

"ağ qutu"-obtekt haqqında hər şey məlumdur;

"boz qutu"-obyektin strukturu məlumdur, lakin parametrlərin ədədi qiymətləri məlum deyil;

"qara qutu"-obyekt haqqında heç nə məlum deyil.

Qara qutunu şərti olaraq



kimi göstərmək olar.

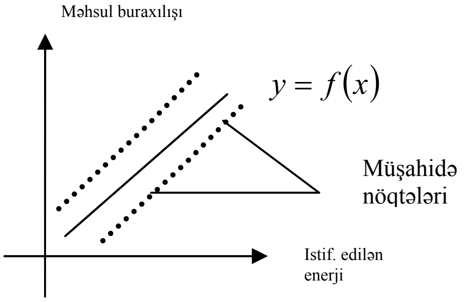
Qara yeşiyin giriş və çıxışının qiymətlərini müşahidə etmək və ölçmək mümkündür.

Məsələ giriş və çıxış parametrlərinin qiymətləri çoxluğundan istifadə edərək, qutunun girişini çıxışına çevirən funksiyanı başqa sözlə modeli qurmaqdan ibarətdir. Belə məsələ reqressiya analizi məsələsi adlanır. Bunun üçün əvvəlcə tədqiqatçı giriş və çıxış funksional asılılıq haqqında hipotez verir.

Əgər sistemin girişini tədqiqatçı idarə edə bilirsə, onda qutu ilə aktiv eksperimentdən, əgər sistemin girişini tədqiqatçı yalnız müşahidə apara bilirsə, onda qutu ilə passiv eksperimentdən danışılır.

Tutaq ki, məhsul buraxılışının istifadə edilən elektrik enerjisinin miqdarından necə asılı olduğunu müəyyənləşdirmək məsələsinə baxılır.

Tutaq ki, müşahidənin nəticələri qrafikdə verilmişdir. Qrafikdə n müşahidəyə uyğun n nöqtə uyğundur.

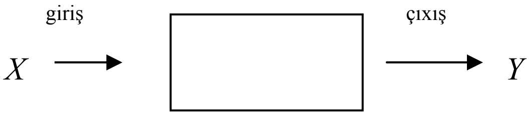


Əvvəlcə fərz edək ki, baxılan obyekt qara qutudur və onun bir çıxışı və bir girişi var. Sadəlik üçün tutaq ki, giriş və çıxış arasında xətti asılılıq var. Belə model xətti birölçülü reqressiya modeli adlanır.

1.Tədqiqatçı qutunun strukturu haqqında hipotez verir. Burada fərz edilir ki, Y çıxışı X girişindən xətti asılıdır, yəni $Y = A_1X + A_0$ hipotezinə tabedir.

2. Modelin naməlum A_0 və A_1 əmsallarının müəyyən edilməsi

Xətti birölçülü model



şəklindədir.

n sayda eksperimental nəticənin hər biri üçün Y_i^{eksp} eksperimental nəticə ilə $Y_i^{n/z}$-nəzəri qiymətlərinin E_i fərqlərini hasablayaq. Nəzəri qiymətlər $A_1X + A_0$ münasibəti ilə hesablanır.

$$E_i = \left(Y_i^{eks} - Y_i^{n/z}\right),\ i = 1,2,\dots,n$$

$$E_i = Y_i - A_0 - A_1X_i,\ i = 1,2,\dots,n$$

$$E_i^2 = \left(Y_i - A_0 - A_1X_i\right)^2$$

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2$$

Üsulun məqsədi F xətasının A_0 və A_1 əmsallarının seçilməsi hesabına minimallaşdırılmasıdır. Bu üsul ən kiçik kvadratlar üsulu adlanır.

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A_0 - A_1 X_i)^2 \to \min_{A_0, A_1}$$

F xətası A_0 və A_1 dəyişənlərinin funksiyasıdır, yəni o, ikidəyişənli funksiyadır. Onu minimallaşdırmaq üçün F funksiyasının hər bir dəyişənə görə xüsusi törəməsini alaq və sıfra bərabər edək (ekstremumun zəruri şərti).

$$\frac{\partial F}{\partial A_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - A_0 - A_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - A_0 - A_1 X_i)X_i = 0$$

Mötərizələri açsaq iki tənlikdən ibarət xətti sistem alarıq:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_0 + A_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ A_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + A_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{cases}$$

Bu sistemi matris şəklində

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix}$$

Bu sistemin həlli

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$$A_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

şəklində olar.

3.Yoxlama

Xəttilik hipotezini qəbul edib-etməməyə son qərarı vermək üçün bu seçimin nə qədər əlverişli olduğunu yoxlamaq lazımdır. Bunun üçün əvvəlcə

$$E_i = \left(Y_i^{eks} - Y_i^{n/z}\right), \quad i = \overline{1, n}$$

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2$$

daha sonra isə

$$\delta = \sqrt{\frac{F}{n}}$$

hesablanır.

Əgər $Y^{n/z} - s$ və $Y^{n/z} + s$ xətləri ilə hüdudlanmış zolağa müşahidə nöqtələrinin 68.26% və daha artıq hissəsi düşürsə, seçilmiş hipotez uğurlu hesab edilir və qəbul edilir. Əks halda başqa daha mürəkkəb hipotez seçilir.

Daha yüksək dəqiqlik tələb edilirsə, $Y^{n/z} - 2s$ və $Y^{n/z} + 2s$ xətləri ilə hüdudlanan zolağa nöqtələrin 95.44%-dən az olmayaraq düşməsi tələb edilir.

Burada s və δ kəmiyyətləri

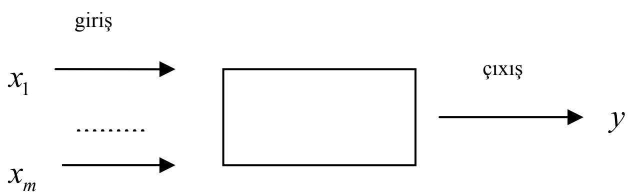
$$s = \frac{\delta}{\sin\beta} = \frac{\delta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - arctgA_1\right)} = \frac{\delta}{\cos(arctgA_1)}$$

münasibəti ilə əlaqədardır.

Xətti çoxölçülü modellər

Tutaq ki, qutunun funksional strukturu xətti asılılığa malikdir, lakin eyni zamanda obyektə təsir edən giriş siqnallarının sayı m -ə bərabərdir.

$$Y = A_0 + A_1X_1 + \ldots + A_mX_m$$



Onda Y_i^{eksp} və $Y_i^{n/z}$ qiymətləri arasındakı xətanı hər bir $i -$ci nöqtə üçün hesablasaq

$$E_i = \left(Y_i^{eksp} - Y_i^{n/z}\right), \; i = 1,2,\ldots,n$$

$$E_i = Y_i - A_0 - A_1X_1 - \ldots - A_mX_m, \; i = 1,2,\ldots,n$$

və E_i -lərin kvadratlarını cəmləsək

$$F(A_0, A_1,\ldots, A_m) = \sum E_i^2 \rightarrow \min_{A_0, A_1,\ldots, A_m}$$

Aydındır ki, F xətası $A_0, A_1,\ldots, A_m$ parametrlərinin seçilməsindən asılıdır. Ekstremumu tapmaq üçün F -in $A_0, A_1,\ldots, A_m$ dəyişənlərinə nəzərən xüsusi törəmələrini sıfra bərabərləşdirsək

$$\frac{\partial F}{\partial A_j} = 0, \quad j = \overline{1,m}$$

olar.

Beləliklə biz $(m+1)$ dəyişənli $(m+1)$ tənlikdən ibarət xətti tənliklər sistemini aldıq. Bu sistemin həlli ilə naməlum $A_0, A_1,\ldots, A_m$ tapılır.

1)

i	X_i	Y_i
1	0	3
2	2	6
3	4	6
4	8	10
5	9	13
6	10	10
7	12	13
8	14	14

2)

H	t
6	1.1
9	1.4
12	1.6
15	1.7
18	1.9
21	2.1
24	2.2
27	2.3
30	2.5

Qeyri-xətti reqressiya

Qeyri-xətti reqressiyanın daha sadə hallarını nəzərdən keçirək: hiperbola, eksponenta və parabola.

1.Hiperbolik reqressiya: Tutaq ki, giriş və çıxış parametrləri arasındakı funksional asılılıq $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ şəklində axtarılır. Bu zaman qeyri-xətti reqressiya asılılığı xətti asılılığa gətirilir. Bunun üçün yeni $z = \frac{1}{x}$ dəyişəni daxil edilir. Belə olduqda hiperbola tənliyi $y = a_0 + a_1 z$ xətti şəklini alır. Xətti funksiyanın əmsalları yuxarıdakı düsturlar vasitəsilə hesablanır. Belə ki, x_i qiymətləri əvəzinə $z_i = \frac{1}{x_0}$ qiymətləri götürülür.

$$a_1 = \frac{n\left(\sum y_i z_i\right) - \sum y_i \sum z_i}{n\left(z_i^2\right) - \left(\sum z_i\right)^2}; \qquad a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a_1 \sum z_i\right).$$

Hesablama apararkən cədvələ əlavə sütunlar əlavə edilir.

2.Eksponensial reqressiya: Tutaq ki, giriş və çıxış parametrləri arasındakı funksional asılılıq $y = a_0 e^{a_1 x}$ şəklində axtarılır. Bunu xətti şəklə salmaq üçün loqarifmləmə aparaq:

$$\ln y = \ln\left(a_0 e^{a_1 x}\right)$$

$$\ln y = \ln a_0 + \ln e^{a_1 x}$$

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x \ln e \;\Rightarrow \ln y = \ln a_0 + a_1 x$$

Yeni dəyişənlər daxil edək:

$$b_0 = \ln a_0; \qquad \ln y = b_0 + a_1 x$$

Onda xətti reqressiya əmsalları düsturunu tətbiq etsək:

$$a_1 = \frac{n\left(\sum x_i \int_t \ln y_i\right) - \sum \ln y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}; \quad b_0 = \frac{1}{n}\left(\sum \ln y_i - a_1 \sum x_i\right).$$

$b_0 -$ın qiymətini hesabladıqdan sonra a_0 əmsalına keçmək lazımdır.

$$a_0 = e^{b_0}$$

3.Parabolik reqressiya: Tutaq ki, giriş və çıxış parametrləri arasındakı funksional asılılıq $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ şəklində axtarılır.

$$f(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_i^{eks}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0.$$

$$\begin{cases} \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) = 0 \\ \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) x_i = 0 \\ \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

Korelyasiya-reqressiya analizi

Bir çox tədqiqat obyektləri bir sıra parametrlərlə xarakterizə edilir. Bu obyektlərin fəaliyyətinin müşahidəsi nəticəsində eksperimental verilənlərin matrislərini qurmaq olar:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Bu matrisin sətirləri bir eksperimentlərdə bütün müşahidə edilən parametrlərin göstəricilərinə, sütunları isə bütün eksperimentlərdə bir parametrin müşahidə nəticələrinə uyğundur. Bir sözlə x_{ij} elementi $i-$ci müşahidə zamanı $j-$ci parametrin göstəricisidir. X matrisi verilənlər matrisi adlanır. Bu matrisdə boşluqlar da ola bilər. Çoxölçülü analizdə yaxşı olar ki, bu buraxılmış qiymətlər aradan qaldırılsın. Bunun üçün xüsusi üsullar var.

Biz hesab edirik ki, matrisdə boş xanalar yoxdur və obyektin parametrləri kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərlə xarakterizə edilir.

Məlumdur ki, tədqiqat obyektini xarakterizə edən parametrlər müxtəlif fiziki mənaya malikdir. Onda aydındır ki, bu və ya digər parametrin ölçüldüyü şkala dəyişdikdə verilənlər matrisi də dəyişəcəkdir. Odur ki, X verilənlər matrisinin standart şəklə gətirilməsi məqsədə uyğundur.

Matrisin standart şəklə gətirilməsi aşağıdakı kimi aparılır:

Hər bir parametr üçün riyazi gözləmə $\mu_1(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$.

dispersiya

$$\mu_2(x_j) = \sigma^2(x_j) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \mu_1(x_j)\right)^2$$

qiymətləri hesablanır. Daha sonra matrisin elementləri

$$U_{ij} = \frac{x_{ij} - \mu_1(x_j)}{\sigma(x_j)}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$$

Aydındır ki, U standartlaşdırılmış matrisinin elementləri ölçüsüz kəmiyyətlər olacaqdır.

Riyazi statistikanın mühüm tətbiqi istiqamətlərindən biri də korrelyasiya analizidir. Korrelyasiya analizi müxtəlif dəyişən kəmiyyətlər arasındakı asılılığı müəyyən etməyə xidmət edir.

Korrelyasiya analizinin əsas məqsədi korrelyasiya əmsallarının hesablanması ilə kəmiyyətlər arasındakı asılılığı xarakterizə edən düz reqressiya tənliklərinin alınmasıdır.

Hesablamalar əsasən iki mərhələdə aparılır. Birinci mərhələdə cədvəl verilənləri əsasında $\bar{x}, \bar{y}, Q_x, Q_y, Q_{xy}$ kəmiyyətləri hesablanır. İkinci mərhələdə korrelyasiya asılılığının əsas parametrlərinin qiymətləri hesablanır.

τ_{xy} kəmiyyəti üçün $-1 \le \tau_{xy} \le 1$ doğrudur. τ_{xy}-in işarəsi istiqaməti, τ_{xy}-in mütləq qiyməti isə xətti korrelyasiya əlaqəsinin sıxlığını göstərir.

Əgər 1) $\tau_{xy} > 0$ olarsa, o deməkdir ki, x-in qiymətinin artması y-in artmasına səbəb olur, yəni x və y arasında müsbət xətti korrelyasiya əlaqəsi var.

2) $\tau_{xy} < 0$ x-in qiymətinin artması y-in orta hesabla azalmasına səbəb olur, yəni x və y arasında mənfi xətti korrelyasiya əlaqəsi var.

Kimyəvi, kimyəvi-texnoloji prosesləri tədqiq edərkən real proseslərin modelləşdirilməsi və layihələndirilməsi məqsədi ilə təcrübə nəticələri verilənlərinin emalı və analizi zərurəti yaranır.

İnterpolyasiya

Mühəndis hesablamalarında bəzən $[a,b]$ parçasının bəzi sonlu sayda x_i nöqtələrində qiyməti məlum olan funksiyanın şəklinin müəyyən edilməsi tələb olunur.

İnterpolyasiya məsələləri praktikada adətən

1. Cədvəl verilənlərinin interpolyasiyanın;
2. Cədvəl şəklində verilmiş eksperimental verilənlər əsasında funksional asılılıqların qurulması;
3. Hesablama baxımından mürəkkəb olan funksiyanın daha sadə asılılıqla əvəz edilməsi;
4. Diferensiallama və inteqrallama zamanı qarşıya çıxır.

Məsələnin qoyuluşu: Tutaq ki, $[x_0, x_n]$ parçasında $n+1$ sayda $x_0, x_1, ... x_n$ nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrdə interpolyasiya ediləcək $y = f(x)$ funksiyasının qiymətləri verilmişdir. x_i nöqtələri interpolyasiya düyünləri adlanır.

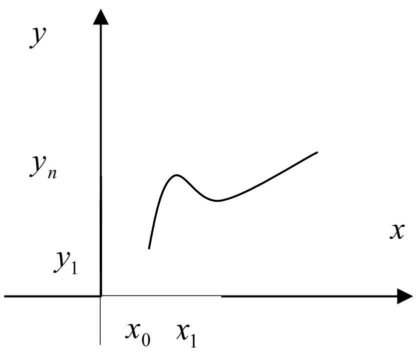
$$y_0 = f(x_0); \ y_1 = f(x_1); \quad y_n = f(x_n) \qquad (1)$$

Arqumentin aralıq qiymətlərində (cədvəldə olmayan) funksiyanın qiymətini tapmaq tələb edilir. Əksər hallarda (1) verilənləri əsasında funksiyanın analitik ifadəsini qurmaq mümkün olmur. Ona görə də bu funksiyanın əvəzinə hesablama baxımından daha asan olan başqa funksiya qurulur.

$$P_m(x_0)=f(x_0)=y_0$$
$$-----------$$
$$P_m(x_i)=f(x_i)=y_i,\ i=0,1,...,n \qquad (2)$$

Belə məsələ interpolyasiya məsələsi adlanır. x_i nöqtələri interpolyasiya düyünləri, $f(x)$ funksiyası-interpolyasiya funksiyası, $P_m(x)$-interpolyasiya çoxhədlisi adlanır. Əgər arqumentin x qiyməti x_0 və x_n düyünləri arasındadırsa, $x_0 \le x \le x_n$ onda $f(x)$ funkiyasının bu nöqtələrdə təqribi qiymətinin tapılması interpolyasiya adlanır. Əgər x arqumenti $[x_0,x_n]$ intervalından kənardadırsa, onda proses ekstrapolyasiya adlanır. İnterpolyasiya termini-inter-arasında, daxilində, pole-düyün, extra-xaricində sözlərindən əmələ gəlmişdir.

Qrafiki olaraq interpolyasiya məsələsi bütün interpolyasiya düyünlərindən keçən interpolyasiya funkiyasının qurulmasından ibarətdir.



İnterpolyasiya məsələsinin həlli zamanı aşağıdakılar fərz edilir:

1. İnterpolyasiya funksiyası $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində kəsilməzdir və bu nöqtələrdə istənilən tərtibli sonlu törəməsi var.
2. İnterpolyasiya düyünləri bir-birindən fərqlidir.

Xətti interpolyasiya

İnterpolyasiyanın daha sadə və daha istifadə edilən növü xətti interpolyasiyadır. Xətti interpolyasiya-verilmiş $(x_i,y_i),\ i=0,1,...,n$ nöqtələrinin düz xətt ilə birləşdirilməsinə əsaslanır və $f(x)$ funkiyası təpələri verilmiş nöqtələrdə olan sınıq xətt vasitəsilə təqribi verilir.

Sınıq xəttin hər bir parçasının tənliyi ümumi halda müxtəlifdir. Belə ki, n sayda (x_{i-1},x_i) intervallarının hər biri üçün iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyindən istifadə edilir. Xüsusi halda $i-$ci interval üçün (x_{i-1},y_{i-1}) və (x_i,y_i) intervallarından keçən

$$\frac{y-y_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$$

şəklində olur. Buradan

$$y=a_ix+b_i, \qquad x_{i-1}\le x\le x_i$$
$$a_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, \quad b_i=y_{i-1}-a_ix_{i-1}. \qquad (3)$$

Xətti interpolyasiyadan istifadə edərək, əvvəlcə x arqumentinin düşdüyü interval müəyyənləşdirilir və sonra (3) qiymətlərindən istifadə edilir.

Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisi

Fərz edək ki, $n+1$ sayda $x_0, x_1, ..., x_n$ nöqtələrində $y_0, y_1, ..., y_n$ qiymətləri müəyyən edilmişdir. Düyün nöqtələrində verilmiş y_i qiymətlərini alan $P_n(x)$ çoxhədlisini qurmaq tələb edilir.

Belə interpolyasiya çoxhədlisi üçün Laqranj

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

çoxhədlisini təklif etmişdir. Belə ki, $L_i(x)$ Laqranj vuruğu olub

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

şəklindədir.

Beləliklə, Laqranj düsturunu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

kimi vermək olar.

Optimal təyinat məsələsinin həlli üçün "macar" üsulu

Fərz edək ki, n iş və n işçi var. $i-$ci işçinin j işini yerinə yetirməsi c_{ij} xərcini tələb edir. İşləri namizədlər arasında elə bölüşdürmək lazımdır ki, çəkilən xərc minimal olsun. Bu zaman nəzərə alınmalıdır ki, hər bir namizəd yalnız bir iş ala bilər, hər bir iş isə yalnız bir nəfərə verilə bilər.

$i-$ci işçiyə j-ci işin verilməsini x_{ij} ilə işarə edək. Əgər $i-$ci işçi j işini alırsa, onda $x_{ij}=1$, əks halda $x_{ij}=0$ olacaqdır.

Onda aydındır ki, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ və $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ olmalıdır. Çəkilən xərc

$$y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

olar.

Təyinat məsələsinin həlli üçün bir çox üsullar vardır. Bunlardan biri də "macar" üsuludur. Üsulun əsas ideyası ondan ibarətdir ki, sətirlərin (sütunların) elementlərinin $d_i\ (d_j)$ qədər azalması (artırılması) təyinat məsələsinin optimal həllini dəyişmir.

"Macar" üsulunun alqoritmi

1) Hər bir sətirdə sıfırların alınması

Bunun üçün hər bir sətirdə ən kiçik olan element tapılır: d_i və bu element həmin sətrin bütün elementlərindən çıxılır və yeni cədvəl qurulur. Analoji əməliyyat sütunlar üçün də aparılır.

Cədvəl 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0	4	2	5	1
A_2	0	2	2	3	1
A_3	2	5	0	6	1
A_4	6	4	0	5	1
b_j	2	-	2	-	
d_j	0	2	0	3	

Cədvəl 2

	B_1	B_2	B_3^*	B_4	a_i
A_1	0^*	2	2	2	1
A_2	0	0	2	0	1
A_3^*	2	3	0^*	3	1
A_4^*	6	2	0	2	1
b_j	1	1	1	1	

2) Optimal həllin tapılması

Optimal həlli tapmaq üçün əvvəlcə cədvəl 2-nin ən az sıfrı olan sətirlərinə baxaq. Bu sətirlərin sıfırlarından birini "*"-la işarə edək və bu sətrin və sütunun qalan sıfırlarının üzərindən xətt çəkək ($\times$). Analoji əməliyyatı bütün sətirlər üçün aparırıq. Əgər "*"-la işarələnmiş xanaların sayı $n-$ə bərabər olarsa, həll optimal olur. Əks halda növbəti mərhələyə keçilir.

3) Sıfır saxlayan sətir və sütunların minimal çoxluğunun tapılması

Bunun üçün

a) heç bir dənə də olsun "*"-la nişanlanmayan bütün sətirlər;
b) "*" nişanlanmış və heç olmazsa bir sıfrı üzərindən xətt çəkilmiş ($\times$) elementi olan sütunlar;
c) sətirlərin "*" işarələnmiş elementləri olan sütunlar "*"-la işarələnir.

b) və c) addımları lazımı sətir və sütunlar "*" işarələməyə kimi davam etdirilir.

Bundan sonra işarələnmiş sətirlərin və işarələnmiş sütunların üzərindən xətt çəkilir.

Bu mərhələnin məqsədi bütün sıfırların üzərindən ən azı bir dəfə minimal sayda üfüqi və şaquli xətlərin çəkilməsidir.

4) Bəzi sıfırların xətlənməsi

Üzərindən xətt çəkilməyən ən kiçik qiymətli xana götürülür. Bu ədəd xətt çəkilməyən sütunlardan çıxılır, xətt çəkilən sətir və sütunlara əlavə edilir. Cədvəl 3-ü aldıq.

Cədvəl 3-də “*” nişanlanmış sıfırların sayı $n-$ə $(4-$ə$)$ bərabər olduğundan təyinat tamdır, həll optimaldır. Bu həll yeganə olmaya bilər.

Cədvəl 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	0^*	2	4	8	1
A_2	$\cancel{0}$	0^*	4	0	1
A_3	$\cancel{0}$	1	0^*	1	1
A_4	4	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0^*	1
b_j	1	1	1	1	

Obyektlərin tədqiqinin təcrübi üsullarının üstünlükləri və çatışmazlıqları

Obyektlərin tədqiqində təcrübi üsulların tətbiqi onların daha sadə və az zəhmət tələb etməsi ilə bağlıdır (üstünlük).

Təcrübi üsulların əsas çatışmazlığı tənliyə daxil olan ədədi parametrlərlə obyektin konstruktiv xarakteristikaları, emal edilən məhsulların fiziki-kimyəvi xüsusiyyətləri arasında funksional əlaqələrin müəyyənləşdirilməsinin qeyri-mümkünlüyüdür. Bundan əlavə, hal hazırda obyektin eksperimental verilənləri əsasında qurulmuş riyazi münasibətləri eyni tipli başqa obyektlərə şamil etmək olmur.

Verilənlərin düzəldilməsi

Bir çox zaman sıralarında statistik verilənlərdə müəyyən xətalar, sapmalar olduqda belə sıraların düzləndirilməsi, hamarlanması ehtiyacı yaranır.

Belə zaman sıralarının düzəldilməsi və proqnozlaşdırılmasının ən yayılmış üsullarından biri eksponensial düzəldilmədir. Bu üsul II dünya müharibəsində ABŞ ordusunda xidmət etmiş Braun tərəfindən sualtı qayıqların və müşahidə sistemlərinin aşkar olunması və müşahidə edilməsi məqsədi ilə işlənmişdir.

Sadə eksponensial düzəldilmənin modeli $X_t = b + \varepsilon_t$ şəklindədir. Burada $b-$sabit, ε-təsadüfi xətadır. b sabiti hər bir zaman intervalında nisbətən sabitdir və kiçicik də olsa dəyişə bilməz.

Eksponensial düzəldilmənin dəqiq düsturu

$$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)S_{t-1}$$

şəklindədir. Əgər bu münasibət rekursiv olaraq tətbiq edilirsə, onda hər yeni düzəldilmiş qiymət (bu proqnoz kimi də istifadə edilə bilər) cari müşahidənin və düzəldilən sıranın hamarlanmış ortası kimi hesablanır. Əgər $\alpha = 0$ qəbul edilirsə, onda cari müşahidədən imtina edilir. α kəmiyyətinin $[0,1]$ ortasında dəyişməsi aralıq nəticələri verə bilir.

Eksponensial düzəldilmənin uğurlu nəticəsi α parametrinin seçilişindən çox asılıdır.

Uzun illər bu parametrin seçilməsi üçün bir birindən fərqli olan nəzəri və empirik mülahizələr söylənmişdir. Qardner(1985) praktikada $\alpha < 0.3$ götürməyi məsləhət bilsə də, Makridaksın tədqiqatlarında $\alpha > 0.3$ götürüldükdə daha yaxşı nəticələr alınmışdır. Onda belə nəticəyə gəlmək olur ki, α-nın seçilişində süni məsləhətlər və necə gəldi istifadədənsə, α-nın optimal qiyməti konkret verilənlərə görə təyin edilməlidir.

α-nın optimal qiymətinin konkret verilənlər üçün qiymətləndirilməsi

Praktikada bu məqsədlə şəbəkədə axtarışdan istifadə edilir. Belə ki, parametrin mümkün qiymətləri müəyyən şəbəkə ilə addımla bölünür.

Məs: $\alpha = 0.1$ və $\alpha = 0.9$ $h = 0.1$ addımı ilə bölünür. Sonra elə α seçilir ki, qalıqların (müşahidə edilən qiymətlə bir addım irəlidəki proqnoz qiymətinin fərqlərinin) kvadratları cəmi (və ya orta qiymətlərinin kvadratları cəmi) minimal olsun.

Analitik modelləşdirmə

Analitik modellər – funksional münasibətlərdən ibarətdir. Bunlar cəbri, diferensial, inteqro-diferensial tənliklər, məntiqi münasibətlər və s. ola bilər. Məs: Maksvell tənliyi elektro-maqnit sahəsinin, Om qanunu isə elektrik dövrəsinin analitik modelidir.

Analitik modellərin tədqiqi üçün aşağıdakı üsullardan istifadə edilir:

1) analitik üsullar- Əgər axtarılan kəmiyyətlər üçün asılılıq münasibətlərin aşkar şəkildə alınmasına səy göstərilirsə;
2) ədədi üsullar-Əgər tənliyin həlli üçün ümumi həll vasitəsi yoxdursa, lakin konkret başlanğıc və sərhəd şərtləri üçün müəyyən nəticələr almaq lazım gələrsə;
3) keyfiyyət üsulları-Məsələnin həlli aşkar şəkildə yoxdur, lakin həllin bəzi xüsusiyyətlərini tapmaq mümkündürsə (məs: dayanıqlığı qiymətləndirmək).

Əgər sistemin analitik təsvirini almaq mümkün olmursa, onda prosesin və ya sistemin fəaliyyətini təsvir etmək üçün alqoritmik təsvirdən istifadə edilir ki, bu modelləşdirmə alqoritmi EHM-də reallaşdırılır. Bəzən sistemin mürəkkəbliyi onu modelləşdirərkən modelin təsvir üsulunun seçilməsini özü diqtə edir.

Belə bir məsələyə baxaq:

İki obyekt məs: piyada və velosipedçi qarşı-qarşıya V_1 və V_2 sürətləri ilə hərəkət edir. Bu obyektlərin harada və nə vaxt görüşəcəklərini müəyyən etmək lazımdır?

Bu məsələnin analitik təsvir üsullarını verək:

1.Aşkar analitik üsul:-Bu məsələni həll etmək üçün amillərin ideallaşdırılması aparılır. Belə ki, yol ideal dərəcədə düz, heç bir maneəsiz, eniş və yoxuşsuz hesab edilir. Bundan əlavə, obyektlərin sürətləri sabit hesab edilir, obyektlərin arzuları dəyişməzdir, hərəkətə mane olacaq əngəllər yoxdur, model S, V_1, V_2 kəmiyyətlərindən (onların hədsiz böyük və kiçik olmasından asılı deyil)

$$T_1 = \frac{S}{V_1 + V_2}, \quad S_1 = V_1 \cdot T_1, \quad S_2 = V_2 \cdot T_1.$$

Böyüktərtibli ideallaşma sayəsində çox sadə bir model alınır ki, bu model riyazi üsulların tətbiqi ilə ümumi şəkildə analitik həll edilə bilir.

2.Qeyri-aşkar analitik üsul-Bu zaman dəyişənlər arasındakı asılılıq $f(T, V_1, V_2, S, S_1) = 0$ şəkilli tənliklər sistemi şəklində göstərilir. Müxtəlif dəyişənlərin qiymətləri üçün “?” götürərək müxtəlif məsələlər almaq olur:

$$T_1(V_1 + V_2) = S$$
$$S_1 = V_1 \cdot T$$
$$T_1 = ?$$

Bu model daha keyfiyyətli modeldir. Burada da ideallaşdırma yüksək olsa da, yazılışın qeyri-aşkar olması məsələni dəyişmə imkanı yaradır və buradan bir sıra məsələlər çıxarmağa şərait yaradır.Analitik modellərdən obyektlərin əsaslı xüsusiyyətlərinin təsviri üçün istifadə edilir. Mürəkkəb obyektləri və prosesləri çox nadir hallarda analitik təsvir etmək mümkün olur.

3.Xətti analitik üsul-Bir sıra iqtisadi məsələlərin məs:istehsalın idarə olunması və planlaşdırılması, avadanlıqların optimal yerləşdirilməsi, istehsalın optimal planının qurulması, yükün daşınmasının optimal planı və s. məsələlərin həlli real dünyanın xətti təsvir edilmiş hipotezinə əsaslanır.

Belə məsələlərin riyazi modelləri xətti münasibətlər şəklində təsvir edilir. Əgər məsələ çoxölçülüdürsə, riyazi model xətti münasibətlər sistemi ilə təsvir edilir.

Proqnozvermə üsulları

Proqnozvermə - öz xarakterinə görə zamanla sıx əlaqədardır. Belə ki, proqnoz vasitəsi ilə biz cari halda gələcəyə nəzər sala bilirik. Belə proqnoz üsulları müxtəllifdir (insanın daxili səsi, ekspert qiymətləri və mürəkkəb ekonometrik modellər). Odur ki, bu və ya digər situasiyanın inkişafının, bu və ya digər vəziyyətin, gələcək dəyişmələrin proqnozlaşdırılması sadə məsələ deyildir. Proqnoz

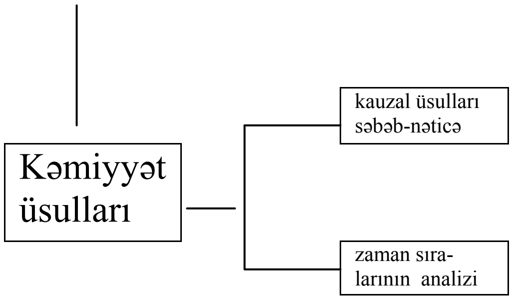
-qısamüddətli (bir ilə və ya bir rüb üçün);

-ortamüddətli (bir ildən üç ilə qədər);

-uzunmüddətli (üç ildən çox).

Proqnozvermə üsullarını-kəmiyyət və keyfiyyət olmaqla iki qrupa bölmək olar:

Proqnoz üsulları — Keyfiyyət üsulları



Keyfiyyət və ya ekspert proqnozlaşdırma üsuları uyğun sahədən olan mütəxəssislərin-ekspertlərin mövqeyini nəzərə alır.

Kəmiyyət proqnozlaşdırma üsulları elementləri ədədi verilənlər olan massivlərin işlənməsini nəzərdə tutur. Bu üsullar öz növbəsində səbəb-nəticə metodları-kauzal üsullar və zaman sıralarının analizi üsullarından ibarətdir.

Kauzal üsulları o hallarda tətbiq edilir ki, sistemin axtarılan vəziyyəti təkcə zamandan asılı olmayıb, bir çox başqa dəyişənlərdən asılıdır.

Zaman sıralarının

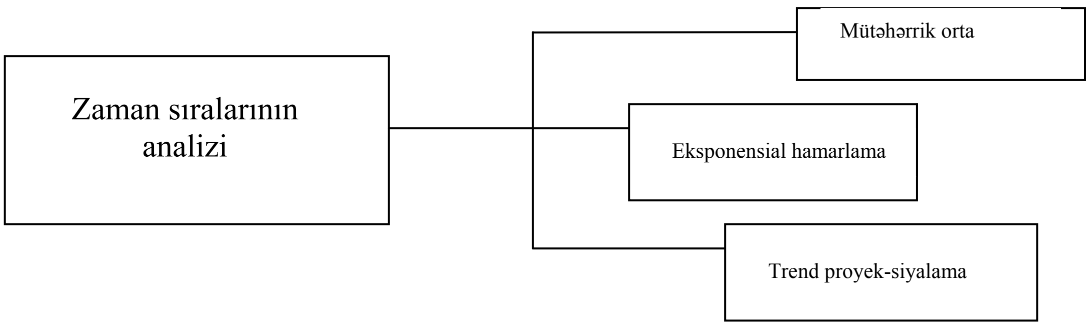
Zaman (dinamik və ya xronoloji) sırası dedikdə hər hansı göstəricinin zaman keçdikcə qiymətləri ardıcıllığıdır.

Zaman sıralarının iki növünü ayırmaq olar: ani və interval.

1. Ani zaman sıralarında baxılan $x_1, x_2, ... x_n$ göstəricilərinin qiymətləri müəyyən zaman anlarında (məs:gün,saat,ay,il) $t_1, t_2, ..., t_n$ anlarına aid edilir və $t_1 < t_2 < ... < t_n$ hesab edilir.
2. Interval zaman sıralarında isə uyğun zaman fasilələri, intervalları nəzərə alınır.

Zaman sıraları çox vaxt cədvəllər və ya qrafik olaraq verilə bilər.

Zaman sıralarının analizi üsulları



Sürüşkən-oynaq orta üsulu-Bu üsulda göstəricinin proqnoz zaman anı üçün qiyməti bu göstəricinin əvvəlki bir neçə zaman anı üçün qiymətlərinin ortalanması vasitəsi ilə aparılır.

Səpinin planlaşdırılması modeli

Tutaq ki, kənd təsərrüfatı müəssisəsi A_1, A_2 və A_3 ilə işarə edilən 3 növ toxumu əkə bilər. Bu toxumlardan bərabər şəraitdə alınan məhsulun miqdarı hava şəraitinin necə olmasından asılıdır. Hər bir toxumdan nə qədər əkilməli olduğunu müəyyən lazımdır ki, onun satışından maksimum gəlir əldə edilsin.

Əgər kənd təsərrüfatı müəssisəsi verilmiş rayonda hava şəraiti haqqında düzgün statistik göstəricilərə malikdirsə və ya havanın düzgün proqnozunu vermə üsulunu bilirsə, onda əkinin optimal planını qurmaq sadədir. Bu zaman müəssisə gəlirin riyazi gözləməsinin maksimallaşdırılmasına əsaslanmalıdır.

Əks halda isə səpinin planlaşdırılması daha çox əlverişsiz hava şəraitini nəzərə alaraq aparılmalıdır. Axırıncı vəziyyətə belə bir şərh verək: bir tərəfdən – kənd təsərrüfatı müəssisəsi (onu *I oyunçu* adlandıraq) elə toxumu əkməyə maraqlıdır ki, maksimal məhsul götürsün ; digər tərəfdən, hava şəraitinən asılı olan təbiət (onu *II oyunçu* adlandıraq) kənd təsərrüfatı müəssisəsinə maksimal zərər vura bilər, yəni bu situasiyanın tərəflərinin əks maraqları vardır. Təbiətin rəqib kimi qəbul edilməsi bu əkinin ən əlverişsiz şərtləri nəzərə alaraq aparılmasına ekvivalentdir. Əgər bu şərtlər (şərait) əlverişli olarsa, onda alınan məhsul gəliri artırmağa imkan verər.

Beləliklə, bu — *antoqonist konflikt*dir. Bu konfliktdə təbiətin hansı *strategiyaları* vardır? Əslində onun strategiyaları (başqa sözlə, təbiətin vəziyyətləri) sonsuz götürülə bilər. Lakin sadəlik üçün hesab edirik ki, il *quraq, normal* və *çox yağıntılı* keçə bilər, yəni hesab edirik ki, II oyunçunun 3 strategiyası var. Kənd təsərrüfatı müəssisəsinin— I oyunçunun də 3 strategiyası var : A_1 toxumu, A_2 toxumu və A_3 toxumu səpmək.

Təsvir edilən konflikt vəziyyəti matrisli oyun şəklində vermək üçün I oyunçunun *uduş funksiyasını* vermək lazımdır. Uduş funksiyası kimi müəssisənin öz məhsulunun satışından əldə etdiyi gəliri götürək. Fərz edək ki, təcrübələr əsasında məlumdur ki, 1 ha əkin sahəsindən

hava quraq keçdikdə h'_{i_1} sentner A_i toxumu,

hava normal keçdikdə h'_{i2} sentner A_i toxumu,

hava yağıntılı keçdikdə h'_{i3} sentner A_i toxumu

götürülür $i = 1,2,3$. Onda toxumun əldə edilməsinə və əkinin hazırlanmasına çəkilən xərcləri nəzərə almasaq,

$$\begin{pmatrix} a_1h'_{11} & a_1h'_{12} & a_1h'_{13} \\ a_1h'_{21} & a_2h'_{22} & a_2h'_{23} \\ a_3h'_{31} & a_3h'_{32} & a_3h'_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

matrisi bütün mümkün situasiyalarda müəssisənin 1 ha-dan aldığı məhsulun satışından əldə etdiyi gəlir matrisi olacaqdır, belə ki, $a_i - A_i$ toxumunun 1s-nin (sentner) qiymətidir.

Beləliklə, (1) matrisi ilə verilən sonlu antaqonist oyun təsvir edilən konfliktin nəzəri oyun modelidir. Bilirik ki, bu oyunda I oyunçunun heç olmazsa bir optimal strategiyası vardır və o

$$a_1 h'_{1j}\, \xi_1^* + a_2 h'_{2j}\, \xi_2^* + a_3 h'_{3j}\, \xi_3^* \ge v, \quad j = \overline{1,3} \qquad (2)$$

şərtini ödəyir, burada $v-$ oyunun qiymətidir.

Aydındır ki, (2) bərabərsizliyinin sol tərəfində duran cəm təbiətin j-ci vəziyyətində müəssisə 1 ha əkin sahəsinin ξ_1^* payına A_1 toxumu, ξ_2^* payına A_2 toxumu və ξ_3^* payına A_3 toxumu əkirsə, onda 1 ha sahədən gözlənilən gəlirə bərabər olur. Deməli, müəssisə əkin sahəsində A_1, A_2 və A_3 toxumlarını $\xi_1^* : \xi_2^* : \xi_3^*$ nisbətində əkərsə, onda istənilən iqlim şəraitində gözlənilən gəlir $v-$dən kiçik olmur.

İstifadə olunan dərsliklər və dərs vəsaitləri

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. 1986, 319с.
2. Ашманов С.А. Линейное программирование. Учеб. Пособ. – М: Наука, 1981, с.304.
3. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. 1965.
4. С.Березин и Н.П.Жидков, Методы вычислений, т.1, М., 1962.
5. Верлань А.Ф. и др. Вычислительные процессы в системах управления и моделирования, 2010.

6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Учеб. Пособ. – М: Наука, 1980, с.518.
7. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. М., 22002, 407с.
8. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Руководство к решению задач по математическому программированию. 1978 .
9. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. 1960.
10. Н.А. Митин. Новые модели математической психологии и информационные процессы, 2011
11. Таха Х. А. Введение в исследование операций. М. 2001, 912с.
12. Оуэн Г. Теория игр. М., 1971