Kombinatorika məsələləri

ÇOXLUQLAR

Çoxluq anlayışı.

Çoxluğu müəyyən obyektlərin yığımı kimi başa düşmək olar. Məsələn sinifdəki şagirdlər çoxluğu, şəhərdəki insanlar çoxluğu, natural ədədlər çoxluğu, cüt ədədlər çoxluğu və s. Çoxluğu təşkil edən obyektlər onun elementləri adlanır. Çoxluqlar adətən latın əlifbasının böyük hərfləri: A, B, C, ... Z və onun elementləri isə kiçik latın hərfləri a, b, c, ... z ilə işarə edirlər.

$$A=\{3,5,7,9,12,14\}$$

Çoxluğu 3, 5, 7, 9, 12 və 14 elementlərindən təşkil olunmuşdur. Elementlərin verilmiş çoxluğa daxil olması "$\in$" işarəsinin, daxil olmaması "$\notin$" işarəsinin köməyi ilə ifadə olunur. Məsələn yuxarıdakı A çoxluğu üçün

$$7\in A$$
$$15\notin A$$

yazmaq olar.

Elementi olmayan çoxluğa məsələn 1 və 2 arasında yerləşən natural ədədlər çoxluğu, boş çoxluq adlanır. Boş çoxluq "$\varnothing$" ilə işarə olunur.
Çoxluğun elementləri sayı sonlu və ya sonsuz ola bilər. Sonlu sayda elementi olan çoxluğa sonlu çoxluq, sonsuz sayda elementi olan çoxluğa sonsuz çoxluq deyilir.

Məsələn: İkirəqəmli cüt ədədlər çoxluğu $A=\{10,12,14,...,98\}$ sonlu çoxluq, natural ədədlər çoxluğu $N=\{1,2,3,...,n,...\}$ sonsuz çoxluqdur.

Çoxluğun elementləri sayına onun **gücü** deyilir. A çoxluğunun gücü $n(A)$ kimi işarə olunur.

$A=\{2,4,6,7,8,12\}$ üçün $n(A)=6$ olur.

Natural ədədlər çoxluğu üçün $n(N)=\infty$.

Elementləri sayı eyni olan çoxluqlara **eynigüclü** çoxluqlar deyilir.

Məsələ: $A=\{x/\,6\le 2n<197\}$, $n(A)=?$

A) 96 B) 191 C) 86 D) 97 E) 99

Həlli: Aydındır ki, bu çoxluğun elementləri 6 və 197 arasındakı (6 daxil olmaqla) cüt ədədlərdir.
Bu ədədlərin birincisi 6, sonuncusu isə 196 – dır (6, 8, 10, ..., 196). Cüt ədədlərin arasındakı fərqin 2 olması aydındır.

Ədədi silsilə bəhsindən bildiyimiz kimi, ardıcıllığın elementləri sayını təyin etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edə bilərik.

$$\boxed{\text{say}=\frac{\text{axırıncı}-\text{birinci}}{\text{fərq}}+1}$$

Bunu nəzərə alsaq.
$n(A)=\dfrac{196-6}{2}+1=96$ alarıq.

Cavab: A

Alt çoxluq.

A çoxluğuna daxil olan hər bir element həm də B çoxluğuna daxildirsə onda A çoxluğuna B çoxluğunun alt çoxluğu deyilir.

Məsələn: $A=\{2,3,5\}$
$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Bir çoxluğun digər çoxluğa daxil olması və ya onun alt çoxluğu olması "$\subset$" işarəsinin köməyi ilə göstərilir.
$$A\subset B$$
Hər bir çoxluq, özünün alt çoxluğudur. Boş çoxluqda ixtiyari çoxluğun alt çoxluğu hesab olunur.

$$A\subset A$$
$$\varnothing\subset A$$

Xassə: $A\subset B$ və $B\subset C$ isə
$\Rightarrow A\subset C$
Bir – birilərinin alt çoxluğu olan çoxluqlara bərabər çoxluqlar deyilir.

$A\subset B$ və $B\subset A$ isə
$\Rightarrow A=B$

<u>**Teorem 1.**</u> n elementli bir çoxluğun bütün alt çoxluqlarının sayı 2^n – dir.

Məsələn: $A=\{a,b,c\}$ çoxluğunun bütün alt çoxluqlarının sayı $2^3=8$ – dir. Bu alt çoxluqlar aşağıdakı kimidir.

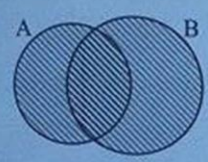
1. $\varnothing$
2. Bir elementli alt çoxluqları: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.
3. İki elementli alt çoxluqları: $\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{b,c\}$
4. Üç elementli alt çoxluqları: $\{a,b,c\}$

__Teorem 2.__ n elementli çoxluğun k elementli $(k \le n)$ alt çoxluqlarının sayı.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi.

A və B çoxlularının elementlərindən bir dəfə istifadə etməklə A və ya B – nin elementlərindən təşkil olunmuş çoxluğa A və B çoxluqlarının birləşməsi deyilir.



$A \cup B$

Çoxluqların birləşməsini "$\cup$" işarəsinin köməyi ilə işarə edirlər.

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ və ya } x \in B\}$$

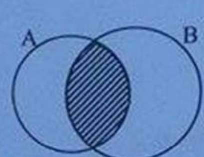
Məsələ: $A = \{12, 7, 8, 15, 9, 21\}$
$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 21, 25\}$

$A \cup B = ?$

A) $\{7, 8, 9, 12, 21\}$
B) $\{12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
C) $\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 21, 25\}$
D) $\{2, 3, 7, 8, 12, 21, 25\}$
E) $\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 15, 25\}$

Cavab: C

A və B çoxluqlarının ortaq elementlərindən təşkil olunmuş çoxluğa A və B çoxluqlarının kəsişməsi deyilir.



$A \cap B$

Çoxluqların kəsişməsi "$\cap$" işarəsinin köməyi ilə işarə olunur.

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ və } x \in B\}$$

Məsələ: $A = \{2, 5, 7, 9, 12, 25\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12\}$

$A \cap B = ?$

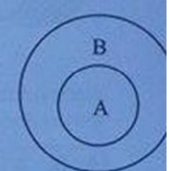
A) $\{2, 5, 7, 12\}$ B) $\{1, 2, 5, 7, 9\}$
C) $\{2, 3, 5, 7, 12\}$ D) $\{2, 5, 9, 12\}$
E) $\{3, 5, 7, 12\}$

Cavab: A

Xassələr:

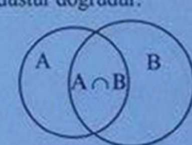
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

$A \subset B$ isə, $A \cup B = B$
$A \cap B = A$



$A \cup \varnothing = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$

A və B çoxluqları üçün birləşmənin elementləri sayı üçün aşağıdakı düstur doğrudur.



$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Məsələ: $n(A) = 15$, $n(B) = 17$ və $n(A \cap B) = 7$ olarsa, $n(A \cup B) = ?$

A) 20 B) 30 C) 32 D) 24 E) 25

Həlli:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) =$
$= 15 + 17 - 7 = 25$

Cavab: E

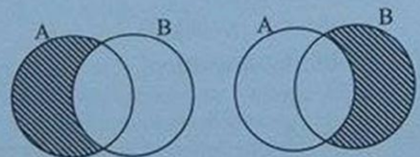
Çoxluqların fərqi.

A və B çoxluları üçün A – ya daxil olub B – yə daxil olmayan elementlərdən təşkil olunmuş çoxluğa A və B çoxluqlarının fərqi deyilir. A və B çoxluqlarının fərqi $A - B$ və ya $A \setminus B$ kimi işarə olunur.

$$\boxed{A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ və } x \notin B\}}$$

Eyni qayda ilə $B - A$ və ya $B \setminus A$ fərqini ifadə etmək olar.

$$B - A = B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ və } x \notin A\}$$

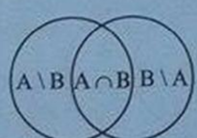


$A \setminus B$ $\quad$ $B \setminus A$

Yuxarıdakılardan aydındır ki, $A \setminus B$ və $B \setminus A$ fərqləri üçün aşağıdakı ifadələr doğrudur.

$$\boxed{A \setminus B = A \setminus (A \cap B)} \qquad \boxed{B \setminus A = B \setminus (A \cap B)}$$
$$\boxed{A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)} \qquad \boxed{B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)}$$

$A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ və $A \cap B$ üçün aşağıdakı düstur doğrudur.



$$\boxed{A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)}$$

Bu düsturlara əsasən verilmiş çoxluqların elementləri sayı üçün də aşağıdakı düstur doğrudur.

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A)}$$

$$\boxed{n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)} \qquad \boxed{n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B)}$$

Məsələ: $n(A \setminus B) = 7$, $n(A \cap B) = 8$ olarsa, $n(A) = ?$

A) 12 B) 1 C) 25 D) 15 E) 13

Həlli:

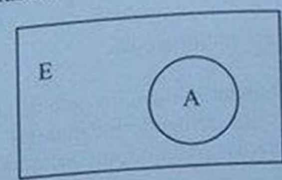
$$n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A) = 7 + 8 = 15$$

Cavab: D

Çoxluğun tamamlayıcısı. Universal çoxluq.

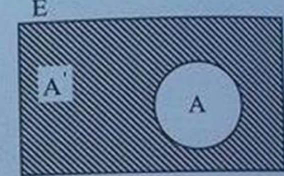
Bütün çoxluqları öz daxilinə olan çoxluğa universal çoxluq deyilir. Universal coxluq U və ya E hərfi ilə işarə olunur.



Universal çoxluğun A çoxluğuna daxil olmayan elementlərindən təşkil olunmuş çoxluğa A çoxluğunun tamamlayıcısı deyilir.

A çoxluğunun tamamlayıcısı A' kimi işarə olunur.

$$A' = E \setminus A$$



Xassələr:

$$\boxed{A \cup A' = E} \qquad \boxed{n(A) + n(A') = n(E)}$$

$A \cap A' = \varnothing$

$(A')' = A$

$\varnothing' = E$

$E' = \varnothing$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

Məsələ həlli zamanı aşağıdakıları bilmək vacibdir:

$n(A) = a + b$

$n(B) = b + c$

$n(A \cap B) = b$

$n(A \setminus B) = a$

$n(B \setminus A) = c$

$n(E) = a + b + c + d$

$n(A') = c + d$

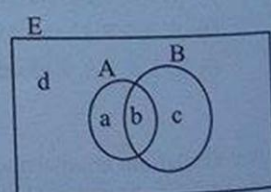
$n(B') = a + d$

$n\left[(A \cap B)'\right] = a + c + d$

$n\left[(A \setminus B)'\right] = b + c + d$

$n\left[(B \setminus A)'\right] = a + b + d$

$n\left[(A \cup B)'\right] = d$

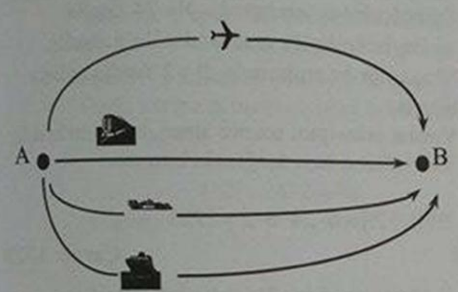


BİRLƏŞMƏLƏR NƏZƏRİYYƏSİ.

Toplama prinsipi.

Aşağıdakı məsələlərə baxaq.

1. A şəhərindən B şəhərinə avtomobillə, qatarla, gəmi ilə və təyyarə ilə getmək olar.



Sual: A şəhərindən B şəhərinə neçə müxtəlif üsulla getmək olar.

Cavab: Hər nəqliyyat növü ilə bir yol var və dörd nəqliyyat növü var, onda $1+1+1+1=4$ müxtəlif üsulla getmək olar.

2. Yarışın qalibi (idmançı) mükafat olaraq 5 müxtəlif televizor və 3 müxtəlif markalı soyuducudan yalnız birini seçə bilər.

Sual: Qalib mükafatını neçə müxtəlif üsulla seçə bilər.

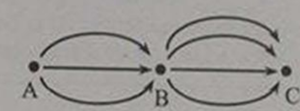
Cavab: Qalib 5 televizor və 3 soyuducudan yalnız birini seçə bildiyindən, bunu $5+3=8$ müxtəlif üsulla edə bilər.

Ümumiyyətlə eyni vaxtda mümkün olmayan (uyuşmayan) iki əməliyyatdan biri m yolla biri n yolla yerinə yetirilirsə, bu əməliyyatlardan birinin və ya digərinin yerinə yetirilməsi $m+n$ yolla mümkündür. Bu təklifi üç və daha çox variant üçün də demək olar.

Yuxarıda verdiyimiz son qayda "toplama prinsipi" adalanır.

Vurma prinsipi.

1. A şəhərindən B şəhərinə 3 yol, B şəhərindən C şəhərinə 4 yol mövcuddur.



Məsələ: B – dən keçməklə A şəhərindən C şəhərinə neçə müxtəlif üsulla getmək olar?

Həlli: A – dan B – yə gedən hər 1 yola uyğun B – dən C – yə 4 yol mövcuddur. Onda A –dan B – yə gedən 3 yolun hər birinə uyğun 4 yol mövcuddur. Onda A – dan C – yə gedən müxtəlif yolların sayı

$3\times4=12$ – dir.

Məsələ: 4 kişi və 3 qadından, 1 nəfər kişi və 1 nəfər qadın olmaqla iki nəfərlik qrupu neçə müxtəlif üsulla təşkil etmək olar?

Həlli: Dörd kişinin hər biri 3 qadından biri ilə seçilə bilər. Onda müxtəlif variantların sayı. $4\times3=12$ olar.

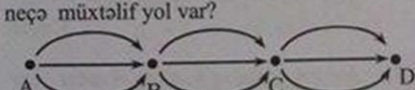
Məsələ: İki nəfər 4 müxtəlif şəhərdə neçə müxtəlif üsulla məskunlaşa bilər?

Həlli: 1 – ci adam 4 üsulla 2 – ci adam da 4 üsulla onda iki adam $4\times4=16$ üsulla məskunlaşa bilər.

Məsələ: A şəhərindən B şəhərinə 3 müxtəlif yol, B şəhərindən C şəhərinə 4 müxtəlif yol var. A şəhərindən C – yə gedən bir nəfər qayıdarkən getdiyi yolları istifadə etmir. Bunun üçün neçə müxtəlif variant mövcuddur?

Cavab: Gedərkən $3\times4=12$ müxtəlif variant var. Qayıdan zaman gediş yollarının hər biri (şəhərlər arasındakı) bir əksilər onda $3\times2=6$ müxtəlif yol olacaq. Onda cəmi $12\times6=72$ müxtəlif variant var.

Məsələ: A şəhərindən B – yə 3, B – dən C – yə 4, C – dən D – yə 2 yol var. A – dan D – yə neçə müxtəlif yol var?



Cavab: Əvvəlki məsələlərdə istifadə etdiyimiz üsuldan istifadə etsək $3\times4\times2=24$ müxtəlif yol

Ümumiyyətlə iki əməliyyatdan birincisi m yolla, və birincisi yerinə yetirildikdən sonra ikincisi n yolla yerinə yetirilə bilirsə onda bu iki əməliyyat birlikdə

$$m \times n$$

müxtəlif üsulla yerinə yetirilə bilər. Bu qaydanı üç və daha çox hal üçün də demək olar.

Bu qaydaya "Vurma prinsipi" deyilir.

Həmçinin vurma prinsipini çoxluqların Dekart hasili də adlandırırlar.

Permutasiyalar.

Elementləri verilmiş sonlu çoxluğun elementlərindən yalnız sırası ilə fərqlənən nizamlı çoxluğa həmin çoxluğun permutasiyası və ya yerdəyişməsi deyilir.

n elementli çoxluğun bütün mümkün permutasiyaları sayı.

$$P_n = n!$$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələn: a, b və c elementlərindən təşkil olunmuş permutasiyalar aşağıdakı kimidir.

a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a

Göründüyü kimi bu a, b və c – nin bütün mümkün yerdəyişməsidir. Belə yerdəyişmələrin sayı

$$3! = 6$$

olduğu aydın görünür.

Məsələ: 5 kitabı rəfdə yan – yana neçə müxtəlif üsulla düzmək olar?

Həlli: $P_5 = 5! = 120$

Cavab: 120

Məsələ: Ardıcıl yerləşən 4 stulda, 4 nəfər neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

Həlli: $P_4 = 4! = 24$

Cavab: 24

Məsələ: 4 futbolçu, 3 volleybolçu və 2 məşqçi bir sırada düzülmüş stullarda, eyni peşə sahibləri yan – yana oturmaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

Həlli: Hər peşədən olan qrupları bir nəfər kimi qəbul etsək onda (peşələrə görə) variantların sayı $3! = 6$ olar.

Digər tərəfdən eyni peşədən olanlar yan – yana oturduğundan:
Futbolçular öz aralarında $4! = 24$ üsulla.
Volleybolçular öz aralarında $3! = 6$ üsulla.
Məşqçilər öz aralarında $2! = 2$ üsulla əyləşə bilərlər.
Vurma prinsipini nəzərə alsaq, bütün mümkün variantların sayı aşağıdakı kim olar.

$$3!(4! \cdot 3! \cdot 2!) = 6 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 2 = 1728$$

Cavab: 1728

Məsələ: 2 alman və 5 ingilis ardıcıl düzülmüş stullarda oturacaqlar. Almanlar yan – yana oturmamaq şərti ilə bu 7 nəfər stullarda neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

Həlli: Əvvəl iki alman yan – yana oturmaq şərti ilə permutasiyaların sayını tapaq. 2 alman yan – yana oturması bütün ingilislərin də yan – yana oturması demək deyil. Bu ola da bilər, olmaya da bilər aşağıdakı sxemə baxaq:

A A I I I I I, I A A I I I I, I I A A I I I, ...

2 alman 1 nəfər kimi qəbul etsək, 6 nəfərlik permutasiyalar alınacaq. Yəni $6!$ Variant var. Digər tərəfdən almanlar öz aralarında $2!$ üsulla əyləşə bilər onda, 2 alman yan – yana oturmaq şərti ilə alınan variantlar $2! \cdot 6!$ olar. (Vurma prinsipinə görə)
Onda bütün halların sayından ($7!$ – dan) almanların yan – yana oturma hallarının sayını ($2! \cdot 6! - i$) çıxsaq, almanların yan – yana oturmama hallarının sayını alarıq.

$$7! - 2! \cdot 6! = 6!(7! - 2!) = 6! \cdot 5 = 720 \cdot 5 = 3600$$

Cavab: 3600

Dairəvi permutasiya:

n müxtəlif elementin dairəvi şəkildə düzülüşü zamanı, elementlərdən birini tərpətməməklə yerdə qalan elementlərin permutasiyaları tapılır.
Bu halda permutasiyaların sayı

$$(n-1)!$$

olur.

Məsələ: 5 nəfər dairəvi masa ətrafında neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

Həlli: $(5-1)!=4!=24$

Cavab: 24

Məsələ: 6 nəfərlik ailədə ata və ana yan – yana olmaq şərti ilə oturacaq şəkildə dairəvi masa ətrafında neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

Həlli: Ata və ananı 1 nəfər kimi qəbul edək. Onda 5 nəfərlik qrupun dairəvi permutasiyaları $(5-1)!=4!=24$ olar. Digər tərəfdən ata və ananın (2 nəfərin) yerdəyişmə sayı $2!$ olur. Onda vurma prinsipinə görə bütün mümkün halların sayı.

$$4!\cdot 2!=24\cdot 2=48$$

olacaq.

Cavab: 48

Məsələ: 5 müəllim, 4 mühəndis və 3 həkim dairəvi masa ətrafında, eyni ixtisasdan olanlar yan – yana oturmaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilərlər?

Həlli: Hər ixtisasdan olanları bir nəfər kimi qəbulk etsək, dairəvi masa ətrafında permutasiyaların sayı $(3-1)!=2!=2$ olar.

Digər tərəfdən eyni ixtisasdan olanlar yan – yana oturduğundan:

Müəllimlər öz aralarında $5!=120$ üsulla.
Mühəndislər öz aralarında $4!=24$ üsulla.
Həkimlər öz aralarında $3!=6$ üsulla.
əyləşə bilər.
Vurma prinsipinə görə, bütün mümkün hallar üçün aşağıdakıları yaza bilərik.

$$(5!\cdot 4!\cdot 3!)=2\cdot 120\cdot 24\cdot 6=34560$$

Cavab: 34560

Məsələ: 3 həkim və 4 mühəndis dairəvi masa ətrafında həkimlər yan – yana oturmamaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

Həlli: Bütün halların sayından həkimlərin yan – yana oturma hallarının sayını çıxsaq həkimlərin yan – yana oturmama hallarının sayını alarıq.

$$(7-1)!=6!=720$$

Həkimlərin 1 nəfər qəbul etsək 5 nəfər üçün dairəvi masada permutasiyaların sayı $(5-1)!=4!=24$ olacaq.

Digər tərəfdən həkimlər öz aralarında $3!=6$ müxtəlif üsulla əyləşə bilir. Vurma prinsipinə görə həkimlər yan – yana oturmaq şərti ilə bütün mümkün halların sayı $3!\cdot 4!$ olacaq.

Onda yan – yana oturmama hallarının sayı.

$$6!-3!\cdot 4!=4!(30-6)=4!\cdot 24=24\cdot 24=576$$

Cavab: 576

Təkrarlı permutasiya.

Biz permutasiyaya tərif verdikdə n elementli çoxluğun bütün mümkün yerdəyişmələri sayını nəzərdə tutmuşduq. Bu zaman n elementdən heç biri təkrarlanmırdı, yəni n elementin hər biri müxtəlif idi. Bəzi hallarda n elementin müəyyən alt qruplar şəklində təkrarlanan (eyni olan) elementləri ola bilər.

Normal permutasiyaya uyğun elementlər.	Təkrarlı permutasiyaya uyğun elementlər.
$\{\underbrace{a, b, c, d, \ldots, f}_{n}\}$	$\{\underbrace{\underbrace{aaa..a}_{n_1}\ \underbrace{bbb..b}_{n_2}\ \ldots\ \underbrace{fff..f}_{n_k}}_{n}\}$

Belə təkrarlı permutasiyaların sayının tapılması üçün aşağıdakı qaydadan istifadə olunur.

Tutaq ki n elementin n_1 ədədi bir element, n_2 ədədi digər element ... bu qayda ilə n_k ədədi də daha fərqli bir elementdir.
Harda ki, $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$
Onda bu şəkildə n elementli çoxluğa uyğun təkrarlı permutasiyaların sayı aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$\boxed{\binom{n}{n_1\ n_2\ n_3 \ldots n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\ldots n_k!}}$$

Məsələ: 67667 ədədinin rəqəmlərinin yerini dəyişməklə neçə ədəd beşrəqəmli ədəd almaq olar?

Həlli: Burada 5 rəqəmin 2 – si 7, 3 – ü isə 6 – dır, yəni $n=5$, $n_1=2$ $n_2=3$ deyə bilərik.

$$\Rightarrow \binom{5}{2\ 3}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$$

Cavab: 10

LEARN İnformatics Magistratura Imtahanında sizlərə uğurlar arzu edir

Məsələ: 5 eyni riyaziyyat və 3 eyni kimya kitabını yan – yana neçə müxtəlif üsulla düzmək olar?

Həlli: Cəmi $5+3=8$ kitab var.

$$\Rightarrow \binom{8}{5\ 3}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{6\cdot7\cdot8}{6}=56$$

Cavab: 56

Məsələ: Üç dənə 5, altı dənə 7 – nin köməyi ilə 7 ilə başlayıb və 7 ilə qurtaran neçə müxtəlif doqquz rəqəmli ədəd yazmaq olar?

Həlli: İki 7 – nin birini əvvələ, birini də sona qoyub tərpətməsək yerdə 4 dənə 7 qalacaq. Onda üç dənə 5 və dörd dənə 7 – yə görə təkrarlı permutasiyaların sayını tapacağıq. Cəmi $3+4=7$ ədəd var. Onda

$$\binom{7}{3\ 4}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$$

Cavab: 35

Aranjemanlar.

Bəzən müəyyən sonlu çoxluqdan həm elementlərinə, həm də elementlərinin sırasına görə fərqlənən alt çoxluqları seçmək lazım gəlir.

$A=\{a,b,c\}$ çoxluğunun elementlərinin sırasına görə də fərqlənən bütün mümkün bir elementli, iki elementli və üç elementli alt çoxluqları aşağıdakı kimidir.

Bir elementli alt çoxluqlar	İki elementli alt çoxluqlar	Üç elementli alt çoxluqlar
a	ab	abc
b	ac	acb
c	ba	bac
	bc	bca
	ca	cab
	cb	cba

n elementli çoxluğun k elementli nizamlı alt çoxluğuna n elementli çoxluğun k elementli aranjemanı deyilir.

n elementli çoxluğun k elementli aranjemanlarının sayı aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$\boxed{A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Yuxarıda deyilənlərdən və düsturdan

$$\boxed{A_n^n=P_n}$$

olduğu alınır.

Yəni n elementli çoxluğun n elementli aranjemanları, n elementli çoxluğun permutasiyaları qədərdir.

Məsələ: Şirkətin 10 nəfər işçisindən 2 nəfər müdür və müdür müavini seçiləcək. Bunu neçə müxtəlif üsulla etmək olar?

Həlli: Burada yerdəyişmələrin əhəmiyyəti var. Tutaq ki, a müdür b müavin və ya b müdür a müavin ola bilər. Ona görə də burada aranjemandan istifadə edəcəyik.

$$A_{10}^2=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=9\cdot10=90$$

Cavab: 90

Məsələ: 8 futbol kulubunun hər biri digəri ilə iki dəfə, öz meydançasında və rəqib meydançasında görüşürlər. Keçirilən oyunların sayını təyin edin.

Həlli: Təkrar oyunlar keçirildiyindən yerdəyişmələri nəzərə almaq lazımdır. Onda keçirilən oyunların sayı

$$A_8^2=\frac{8!}{(8-2)!}=\frac{8!}{6!}=7\cdot8=56$$

Cavab: 56

Məsələ: $A=\{2,5,7,9\}$ elementlərindən rəqəmləri müxtəlif olan neçə üç rəqəmli ədəd yazmaq olar?

Həlli: 4 elementin 3 elementli aranjemanlarını tapmaq lazımdır.

$$A_4^3=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=24$$

Cavab: 24

Məsələ: $\{6,3,7,9,5\}$ çoxluğunun üç elementli aranjemanlarının neçəsində 7 və ya 5 iştirak edir?

Həlli: $\{6,3,7,9,5\}$ çoxluğunun bütün üç elementli aranjemanları

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=60$$

7 və 5 – i ayırsaq, (yəni 7 və 5 – in iştirak etmədiyi aranjemanların sayı) üç element qalacaq.

$$\Rightarrow A_3^3=3!=6$$

Onda 7 və 5 – in iştirak etdiyi aranjemanların sayı, bütün aranjemanların sayı ilə 7 və 5 – in iştirak etmədiyi aranjemanların sayları fərqinə bərabərdir.

$$A_5^3-A_3^3=60-6=54$$

Məsələ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 və 9 rəqəmlərindən düzəldilmiş və rəqəmləri fərqli bütün üç rəqəmli ədədlərin sayını tapın.

Həlli: 10 elamanlı bütün 3 elementli aranjemanlarının sayı

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Bu aranjemanların bəzilərində "0" rəqəmi birinci gəlir və həmin ədədlər üç rəqəmli sayılmır. Bu halların sayını bütün halların sayından çıxmaq lazımdır. Birinci rəqəm "0" olarsa yerdə qalan iki rəqəm 1, 2, ... 9 rəqəmlərindən seçiləcək onda belə halların sayı:

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 8 \cdot 9 = 72 \text{ olar.}$$

$$\Rightarrow 720 - 72 = 648$$

Cavab: 648

Məsələ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rəqəmlərindən 1000 – dən kiçik və rəqəmləri təkrarlanmayan neçə müxtəlif natural ədəd düzəltmək olar?

Həlli: Bu halda ən kiçik ədəd 1, ən böyük ədəd 999 – dur. Yəni biz verilən 9 rəqəmdən düzəldilə bilən bir rəqəmli, iki rəqəmli və üç rəqəmli (rəqəmləri müxtəlif) ədədlərin sayını tapmalıyıq.

$$\Rightarrow A_9^1 + A_9^2 + A_9^3 = \frac{9!}{(9-1)!} + \frac{9!}{(9-2)!} + \frac{9!}{(9-3)!} =$$

$$= \frac{9!}{8!} + \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{6!} = 9 + 72 + 504 = 585$$

Cavab: 585

Kombinezonlar.

Bəzən verilmiş sonlu çoxluqdan yalnız elementləri ilə fərqlənən (elementlərin sırası ilə deyil) müxtəlif alt çoxluqlar seçmək lazım gəlir.

$A = \{a, b, c\}$ çoxluğunun müxtəlif bir elementli, iki elementli və üç elementli alt çoxluqları aşağıdakı kimidir.

Bir elementli alt çoxluqlar	İki elementli alt çoxluqlar	Üç elementli alt çoxluqlar
a b c	ab ac bc	abc

Göründüyü kimi aranjemanlardan fərqli olaraq burada elementlərin sırası əhəmiyyətli deyil. Yəni ab varsa ba – ya ehtiyac yoxdur. abc varsa a, b və c – ni digər yerdəyişmələrinə baxılmır.

n elementli çoxluğun k elementli müxtəlif alt çoxluqlarının hər birinə n elementli çoxluğun k elementli kombinezonu deyilir.

n elementli çoxluğun bütün mümkün k elementli kombinezonlarının sayı aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Son düsturda $\frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$, $k! = P_k$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq.

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n^k = C_n^k \cdot P_k}$$

Məsələ: 8 şagirddən üç nəfər növbətçini neçə müxtəlif üsulla seçmək olar?

Həlli: 8 elementli çoxluğun 3 elementli alt çoxluqlarının sayını tapmaq lazımdır.

$$\Rightarrow C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = 7 \cdot 8 = 56$$

Cavab: 56

Məsələ: 9 futbol komandasının hər biri, digər komandalarla bir dəfə oyun keçirir. Keçirilən oyunların sayını tapın.

Həlli: Burada 9 komandanın iki – iki görüşlərinin sayını tapmaq lazımdır.

$$\Rightarrow C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$$

Cavab:

Kombinezonların xassələri.

1) $C_n^0 = 1$

2) $C_n^n = 1$

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$

4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

5) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Qeyd: Tutaq ki, A n elementli çoxluqdur.

$$\text{onda}\begin{cases} C_n^1 & A-\text{nın bir elementli} \\ C_n^2 & A-\text{nın iki elementli} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n^n & A-\text{nın } n \text{ elementli} \end{cases}$$

alt çoxluqlarının sayını göstərir.

Boş $(\varnothing)$ çoxluq hər bir çoxluğun alt çoxluğu olduğu üçün və sayı 1 – ə bərabər olduğu üçün C_n^0 – da A – nın alt çoxluğunun sayını göstərir.

$\Rightarrow$ Aydın olur ki, n elementli çoxluğun bütün alt çoxluqlarının sayı

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n}$$

düsturu ilə hesablanır.

Məsələn: 5 elementli $A = \{a, b, c, d, e\}$ çoxluğunun bütün alt çoxluqlarının sayı

$2^5 = 32$ – yə bərabərdir.

İndi kombinzonların tətbiqi ilə bağlı bəzi məsələ tiplərinə baxaq.

Məsələ: Qabarıq n bucaqlının diaqonallarının sayını tapın.

Həlli: Qabarıq n bucaqlının n təpəsi var və bu təpələri iki – iki birləşdirən parçaların sayı.

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Bu parçaların sayından qabarıq n bucaqlının tərəflərinin sayını $(n-i)$ çıxsaq onun diaqonallarının sayını alarıq.

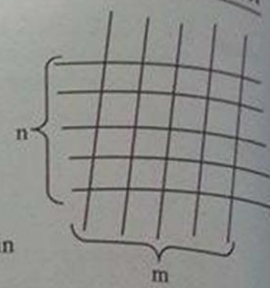
$$\text{Diaqonal sayı} = C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n =$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Diaqonal sayı} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Cavab: $\frac{n(n-3)}{2}$

Məsələ: Şəkildə n sayda paralel düz xətt digər m sayda paralel düz xətlə kəsişib. Xətlərin kəsişməsindən alınan paraleloqramların sayını tapın.



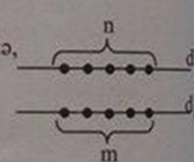
Həlli: Paraleloqramın iki paralel düz xətdin digər iki paralel düz xətlə kəsişməsindən alınan fiqurdur. Onda, n paralel düz xəttin iki – iki kombinzonları sayı C_n^2, m paralel düz xəttin iki – iki kombinasiyaları sayı C_m^2. Onda vurma prinsipinə görə, belə kəsişən iki – iki paralel xətlərin əmələ gətirdiyi paraleloqramların sayı

$$C_n^2 \cdot C_m^2$$

olacaq.

Cavab: $C_n^2 \cdot C_m^2$

Məsələ: Şəkildə $d_1 // d_2$ d_1 üzərində n fərqli nöqtə, d_2 üzərində isə m fərqli nöqtə götürülmüşdür. Təpələri verilmiş nöqtələrdən hər hansı ucu olan neçə fərqli üçbucaq çəkilə bilər.



Həlli: Əvvəl qeyd edək ki, eyni düz xətt üzərindəki nöqtələr üçbucaq əmələ gətirməz. Deməli aşağıdakı hallar mümkündür.

1) 1 təpə nöqtəsi d_1 – in üzərində, 2 təpə nöqtəsi d_2 – nin üzərində olan üçbucaqlar. Belə üçbucaqların sayı vurma prinsipinə görə

$$C_n^1 \cdot C_m^2 = n \cdot C_m^2$$

olar.

2) 1 təpə nöqtəsi d_2 – nin, 2 təpə nöqtəsi d_1 üzərində olan üçbucaqlar. Belə üçbucaqların vurma prinsipinə görə

$$C_n^2 \cdot C_m^1 = m \cdot C_n^2$$

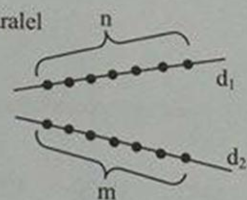
olar.

Burada bütün mümkün üçbucaqların sayı üçün

$$C_n^1 \cdot C_m^2 + C_n^2 \cdot C_m^1 = n \cdot C_m^2 + m \cdot C_n^2$$

Cavab: $n \cdot C_m^2 + m \cdot C_n^2$

Qeyd: Burada düz xətlər paralel olmadıqda da eyni qayda doğrudur.



Üçbucaqların say $n \cdot C_m^2 + m \cdot C_n^2$ – dir.

Məsələ: Eyni müstəvidə yerləşən və n paralel xətt, üçü və daha çoxu bir nöqtədə kəsişmirsə, neçə müxtəlif üçbucaq əmələ gətirir.

Həlli: Məsələnin şərtindən aydın olur ki, n düz xəttin üç – üç kəsişməsindən (müxtəlif nöqtələrdə) alınan üçbucaqlardan söhbət gedir. Onda aydındır ki, belə üçbucaqların sayı n – in 3 elementli kombinezonları qədərdir.
Üçbucaq sayı $= C_n^3$

Cavab: C_n^3

Məsələ: 7 nəfərlik qrupdan 3 nəfər bələdiyyə, 4 nəfər isə dövlət qulluğuna işə qəbul olunacaq. Bunu neçə müxtəlif üsulla etmək olar?

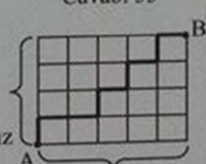
Həlli: Burada iki yanaşma ola bilər.

1) 7 nəfərdən 3 nəfər bələdiyyəyə
$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 35$ üsulla seçilə bilər.
onda yerdə qalan 4 nəfər dövlət qulluğuna işə götürüləcək.

2) 7 nəfərdən 4 nəfər dövlət qulluğuna
$C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$ üsulla seçilə bilər onda yerdə qalan 3 nəfər bələdiyyəyə işə götürüləcək.
Hər iki yanaşmada variantların sayı eyni 35 olur.

Cavab: 35

Məsələ: $m \times n$ ölçülü düzbucaqlı şəklində şəbəkənin A aşağı sol küncündən B yuxarı sağ küncünə yalnız şəbəkə xətləri ilə aparan ən qısa yolların sayını tapın.



Həlli: Bütün hallarda A nöqtəsindən B nöqtəsinə m addım yuxarı, n addım sağa şəbəkə xətləri ilə getmək lazım gəlir. Yəni $(m+n)$ sayda şəbəkə xəttindən istifadə olunmalıdır.

Bu $(m+n)$ şəbəkə xəttinin A – dan sağa doğru n elementli alt çoxluqları,

$$C_{m+n}^n$$

qədər, variant var.
Eyni qayda ilə A – dan yuxarıya doğru m elementli altçoxluqları götürməliyik.
Bu halda C_{m+n}^m variant alınır.
Kombinzonunun xassəsinə əsasən.

$$C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$$

doğrudur.
Yəni hər iki yanaşma ilə variantların sayı eynidir.

Cavab: C_{m+n}^n və ya C_{m+n}^m

Məsələ: 7 futbolçu və 5 voleybolçu arasından 3 futbolçu və 2 voleybolçu neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?

Həlli: 7 futbolçudan 3 – ü C_7^3 üsulla 5 voleybolçudan 2 – si C_5^2 üsulla seçilə bilər.
Onda vurma prinsipinə görə mümkün variantların sayı

$$C_7^3 \cdot C_5^3$$

olacaqdır.

$$\Rightarrow C_7^3 \cdot C_5^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 350$$

Cavab: 350

Məsələ: 5 oğlan və 4 qız şagird arasından 3 nəfərlik növbətçi qrupu düzəldilməlidir. Növbətçi qrupunda ən azı bir oğlan iştirak etməlidir. Bunu neçə müxtəlif üsulla etmək olar?

Həlli: Ən azı bir oğlanın olması o deməkdir ki, qrupda iki nəfər də oğlan ola bilər, və ya qrupun hamısı (üç nəfərin üçü də) oğlan ola bilər.

1) 1 oğlan olan halda 2 qız olacaq, onda variantların sayı.

$$C_5^1 \cdot C_4^2 = 5 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 5 \cdot 6 = 30$$

2) 2 oğlan olan halda onda 1 qız olacaq, onda variantların sayı.

$$C_5^2 \cdot C_4^1 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 4 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 40$$

3) Hamısı (yəni 3 – ü) oğlan olarsa, onda variantların sayı

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$\Rightarrow$ bütün variantların sayı $30 + 40 + 10 = 80$ olar.

Cavab: 80

TESTLƏR

1. 5 fərqli kitab rəfə yan – yana düzülməlidir. Neçə fərqli üsulla düzmək olar?

A) 180 B) 24 C) 32 D) 80 E) 120

2. 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmlərini istifadə edərək neçə fərqli üç rəqəmli natural ədəd düzəltmək olar?

A) 80 B) 60 C) 24 D) 30 E) 40

3. Eyni formada olan 3 sarı, 2 göy və 4 qırmızı qutu yan – yana düzülməlidir. Qırmızı qutuların hamısı yan – yana olmaq şərti ilə qutuları neçə müxtəlif üsulla düzmək olar?

A) 50 B) 40 C) 60 D) 80 E) 70

4. Maqazində 8 fərqli köynək və 5 fərqli qalstuk satılır. Bu maqazindən alınacaq 1 köynək və 1 qalstuk neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?

A) 3 B) 13 C) 25 D) 36 E) 40

5. 6 kişi və 4 qadın arasından, 4 kişi və 2 qadın neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?

A) 90 B) 24 C) 36 D) 60 E) 100

6. 8 elementli bir çoxluğun nçə 3 elementli alt çoxluğu var?

A) 12 B) 20 C) 27 D) 41 E) 56

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ çoxluğunun alt çoxluqlarının neçəsində 1 və 2 elementləri iştirak edir?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 32 E) 48

8. Sinifdə ingiliscə bilən 16 şagird, almanca bilən 24 şagird var. İngiliscə və ya almanca bilən 32 şagird olduğuna görə, hər iki dili bilən neçə şagird var?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

9. Sinifdəki şagirdlərin 40% – i Riyaziyyat dərsindən kəsilir. Riyaziyyat dərsindən kəsilən şagirdlərin 40% – i 40 – dan aşağı nəticə göstərir. 40 – dan aşağı bal alan şagirdlər sinfin neçə faizini təşkil edir?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 20

10. İki rəqəmli natural ədədlərin neçəsi 3 və ya 5 – ə bölünür?

A) 40 B) 42 C) 48 D) 50 E) 54

11. Fizika imtahanında 80 – dən yuxarı nəticə göstərənlərin sayı 60 – 80 arası qiymət alanların 2 misli, 0 – 60 arası alanların yarısı qədərdir. Sinifdə ən az neçə şagird var?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

12. 40 nəfərlik sinifdə ingiliscə bilənlərin sayı 24, almanca bilənlərin sayı isə 12 nəfərdir. Hər iki dili bilməyən 10 nəfər olduğuna görə, hər iki dili neçə nəfər bilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13. Hamının futbol və voleybol oynadığı bir sinifdə 28 şagirddən 18 – i futbol 5 – i futbol və voleybol oynayır. Sinifdə ancaq voleybol oynayanlar neçə nəfərdi?

A) 2 B) 5 C) 12 D) 10 E) 8

14. Azərbaycan və Alman dillərinin istifadə olunduğu bir qrupun yarısı hər iki dildə danışa bilir. Ancaq Almanca bilənlərin sayı Ancaq Azərbaycanca bilənlərin 2 mislinə bərabərdir. Almanca bilən 20 nəfər olduğuna görə neçə nəfər Azərbaycanca danışa bilir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

15. A çoxluğunun 2 elementli alt çoxluqlarının sayı 36 olarsa, A – nın neçə 4 elementli alt çoxluğu var?

A) 70 B) 120 C) 36 D) 63 E) 126

16. Futbol, voleybol və basketbol oynayanlarla heç birini oynamayanlardan təşkil olunan bir qrupda ən az iki oyun oynayanlar 30 nəfər, ən çox bir oyunu oynayanlar 20 nəfərdir, ən çox iki oyunu oynayanlar 45 nəfərdir. Qrupda hər üçünü də oynayan neçə nəfər var?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

17. 40 şagirddən 30 nəfəri üzə bilir, 27 nəfəri futbol oynaya bilir, 5 nəfəri isə heç birini bacarmır. Neçə nəfər şagird həm üzə bilir həm də futbol oynaya bilir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

18. 16 nəfərlik bir qrupda Azərbaycanca danışa bilənlər İngilis dilini də bilir amma Fransızca bilmir. Həm Fransızca həm də İngiliscə bilən iki nəfər, ancaq Fransızca bilən 5 nəfər və ancaq İngiliscə danışa bilən 4 nəfərdir. Azərbaycan dilini bilən neçə nəfərdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ çoxluğunun 4 elementli alt çoxluqlarının neçəsində a iştirak edər, c iştirak etməz?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

20. $A = \{1, 2, 3, a\}$ çoxluğunun ən az iki elementli alt çoxluqlarının sayı neçədir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 11

11. Fizika imtahanında 80 – dən yuxarı nəticə göstərənlərin sayı 60 – 80 arası qiymət alanların 2 misli, 0 – 60 arası alanların yarısı qədərdir. Sinifdə ən az neçə şagird var?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

12. 40 nəfərlik sinifdə ingiliscə bilənlərin sayı 24, almanca bilənlərin sayı isə 12 nəfərdir. Hər iki dili bilməyən 10 nəfər olduğuna görə, hər iki dili neçə nəfər bilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13. Hamının futbol və voleybol oynadığı bir sinifdə 28 şagirddən 18 – i futbol 5 – i futbol və voleybol oynayır. Sinifdə ancaq voleybol oynayanlar neçə nəfərdi?

A) 2 B) 5 C) 12 D) 10 E) 8

14. Azərbaycan və Alman dillərinin istifadə olunduğu bir qrupun yarısı hər iki dildə danışa bilir. Ancaq Almanca bilənlərin sayı Ancaq Azərbaycanca bilənlərin 2 mislinə bərabərdir. Almanca bilən 20 nəfər olduğuna görə neçə nəfər Azərbaycanca danışa bilir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

15. A çoxluğunun 2 elementli alt çoxluqlarının sayı 36 olarsa, A – nın neçə 4 elementli alt çoxluğu var?

A) 70 B) 120 C) 36 D) 63 E) 126

16. Futbol, voleybol və basketbol oynayanlarla heç birini oynamayanlardan təşkil olunan bir qrupda ən az iki oyun oynayanlar 30 nəfər, ən çox bir oyunu oynayanlar 20 nəfərdir, ən çox iki oyunu oynayanlar 45 nəfərdir. Qrupda hər üçünü də oynayan neçə nəfər var?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

17. 40 şagirddən 30 nəfəri üzə bilir, 27 nəfəri futbol oynaya bilir, 5 nəfəri isə heç birini bacarmır. Neçə nəfər şagird həm üzə bilir həm də futbol oynaya bilir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

18. 16 nəfərlik bir qrupda Azərbaycanca danışa bilənlər İngilis dilini də bilir amma Fransızca bilmir. Həm Fransızca həm də İngiliscə bilən iki nəfər, ancaq Fransızca bilən 5 nəfər və ancaq İngiliscə danışa bilən 4 nəfərdir. Azərbaycan dilini bilən neçə nəfərdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. $M=\{a,b,c,d,e,f\}$ çoxluğunun 4 elementli alt çoxluqlarının neçəsində a iştirak edər, c iştirak etməz?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

20. $A=\{1,2,3,a\}$ çoxluğunun ən az iki elementli alt çoxluqlarının sayı neçədir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 11

21. 1 dən 100 – ə qədər olan ədədlərin neçəsi 3 və ya 7 – yə tam bölünür?

A) 4 B) 10 C) 29 D) 39 E) 43

22. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$ çoxluğunun neçə 2 elementli alt çoxluğu var?

A) 9 B) 15 C) 18 D) 22 E) 30

23. $A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, \Delta\}$ çoxluğunun 4 elementli alt çoxluqlarının neçəsində c və Δ – dan ən az biri iştirak etsin?

A) 55 B) 52 C) 48 D) 45 E) 42

24. Sinifdə ən az bir dili bilən 20, ən çox bir dil bilən 18 nəfər var. Ancaq bir dil bilən 6 nəfərdir. Sinifdə neçə şagird var?

A) 12 B) 14 C) 18 D) 26 E) 32

25. Sinifdəki şagirdlərdən 34 – ü futbol, 33 – ü basketbol oynuyur. Onlardan 16 – ı hər iki idmanla məşğul olursa bu sinifdə neçə şagird idmanla məşğul olur?

A) 83 B) 76 C) 68 D) 51 E) 50

26. Sinifdəki şagirdlər rəsim, musiqi və idman dərslərindən ikisini seçməlidirlər. Musiqi dərsini 21 nəfər, rəsim dərsini 17 nəfər və idman dərsini 32 nəfər seçdiyinə görə, sinifdə neçə nəfər şagird var?

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 40

27. İdman klubunun 70% – i futbolçu 40% – i basketbolçudur. 10 nəfər həm futbolçu həm də basketbolçu olduğuna görə, ancaq futbol oynayan neçə nəfər var?

A) 65 B) 60 C) 55 D) 50 E) 40

28. 28 nəfərlik sinifdə şagirdlərin 10 – u İngiliscə, 15 – i Fransızca 13 – ü Almanca danışır. Bu sinifdə 8 şagird İngiliscə və Fransızca, 5 şagird İngiliscə və Almanca, 6 şagird Fransızca və Almanca danışır. 6 nəfər şagird bu üç dildən heç birini bilmir. Bu üç dili bilən neçə nəfər var?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

29. Turistlərdən Azərbaycan dilini bilən 45, Fransızca bilən 32, İspanca bilən 35 nəfər var. Qrupda hər üç dili bilən yoxdu, amma iki dili bilən var. Qrupda neçə nəfər var?

A) 52 B) 53 C) 54 D) 55 E) 56

30. Sinifdəki 50 şagirddən 20 nəfər futbol, 25 nəfər basketbol oynaya bilir. Sinifdə həm futbol həm də basketbol oynaya bilməyən 15 nəfər var. Hər iki oyunu oynaya bilən neçə nəfər var?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

31. Alman və İngilis dillərindən ən az birini bilənlərdən təşkil olunmuş qupda, iki dil bilənlərin sayı ancaq bir dil bilənlərin sayına bərabərdir. Ən az bir dil bilənlərin sayı ancaq bir dil bilənlərin sayının neçə mislidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

32. $A = \{0,1,2,3,4\}$ çoxluğunun elementlərini istifadə edərək rəqəmləri təkrarlanmayan neçə 4 rəqəmli cüt ədəd yazmaq olar?

A) 48 B) 60 C) 72 D) 96 E) 144

33. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ rəqəmlərindən istifadə edərək 320 – dən böyük, rəqəmləri fərqli neçə 3 rəqəmli ədəd yazmaq olar?

A) 37 B) 43 C) 51 D) 52 E) 61

34. Sinifdə İngilis və ya Alman dillərindən ən az birini bilən 42 nəfər var. İngiliscə bilənlərin sayı Almanca bilənlərin 3 misli, hər iki dili bilənlərin 6 misli qədərdir. Sinifdə neçə nəfər İngiliscə bilir?

A) 24 B) 28 C) 30 D) 36 E) 38

35. $A = \{1,2,3,4\}$ çoxluğunun elementlərindən istifadə edərək rəqəmləri fərqli 4 – ə bölünən neçə 4 rəqəmli ədəd düzəltmək olar?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

36. A, B, C, D, E, F, G hərfləri bir dəfə istifadə olunmaq şərti ilə, 4 hərfli mənalı və ya mənasız sözlər yazılmalıdır. Bu sözlərin neçəsində D hərfi iştirak edər?

A) 480 B) 360 C) 320 D) 240 E) 120

37. 102345 ədədində rəqəmlərin yerini dəyişdirərək 15 – ə tam bölünən neçə 6 rəqəmli ədəd yazmaq olar?

A) 235 B) 216 C) 192 D) 180 E) 164

38. 7 nəfərlik bir qrupda Cəmil və Tahir bir yerdə olmamaq şərti ilə 3 nəfərlik bir qrup qurulmalıdır. Bu qrupu neçə fərqli üsulla qurmaq olar?

A) 24 B) 28 C) 30 D) 35 E) 40

39. Qutuda 5 göy 3 sarı daş var. Qutudan 1 göy və ya 1 sarı daş neçə fərqli üsulla seçilə bilər?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

LEARN İnformatics Magistratura Imtahanında sizlərə uğurlar arzu edir

40. Üç nəfər salondakı 7 boş yerə neçə müxtəlif üsulla otura bilər?

A) 180 B) 210 C) 280 D) 360 E) 240

41. Hər biri 6 oyunçudan ibarət olan iki voleybol komandası xatirə şəkli çəkdirirlər. İki komandadan biri qabaqda biri arxada olmaq şərti ilə neçə fərqli şəkil çəkdirə bilərlər?

A) $2\cdot6!$ B) $12!$ C) $6!\cdot6!$
D) $4\cdot6!\cdot6!$ E) $2\cdot6!\cdot6!$

42. 4 fərqli fizika, 3 fərqli riyaziyyat kyabları içindən 2 fizika, 2 riyaziyyat kitabı neçə fərqli üsulla seçilə bilər?

A) 10 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

43. 3 sarı 5 qırmızı top içindən 3 top seçilməlidir. Seçilən toplardan 1 – nin sarı olması şərti ilə neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?

A) 10 B) 15 C) 25 D) 30 E) 40

44. 6 nəfərlik bir qrupdan 3 nəfər İsmayıllıya 3 nəfərdə Qəbələyə gedəcək. Bu qrup neçə fərqli üsulla təşkil olunar?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 20 E) 24

45. $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ çoxluğunun elementlərindən istifadə edərək 400 – dən böyük 3 rəqəmli neçə natural ədəd yazmaq olar?

A) 250 B) 399 C) 400 D) 599 E) 600

46. $F=\{0,1,2,3,5,8,9\}$ çoxluğunun elemetləri ilə rəqəmləri fərqli və 5555 – dən kiçik neçə 4 rəqəmli ədəd yazmaq olar?

A) 80 B) 240 C) 360 D) 440 E) 480

47. 3 nəfər 4 fərqli liftə neçə müxtəlif üsulla daxil ola bilər?

A) 12 B) 64 C) 81 D) 125 E) 243

48. 4 riyaziyyat, 5 kimya və 4 fizika kitabının olduğu rəfdən 1 riyaziyyat, 1 kimya və 1 fizika kitabı neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?

A) 12 B) 18 C) 30 D) 45 E) 80

49. A şəhərindən B şəhərinə 6, B şəhərindən C şəhərinə 2 fərqli yolla getmək olur. B şəhərindən keçmək şərti ilə A şəhərindən C şəhərinə neçə fərqli üsulla gedib qayıtmaq olar?

A) 12 B) 24 C) 48 D) 36 E) 144

50. $B=\{0,1,2,3,4,8\}$ çoxluğunun elementlərindən istifadə edərək rəqəmləri fərqli olan neçə 3 rəqəmli cüt natural ədəd yazmaq olar?

A) 20 B) 68 C) 52 D) 80 E) 100

51. 15 nəfərlik bir sinifdə oğlan şagirdlərin təşkil edə biləcəyi 2 nəfərlik qrupların sayı, sinifdəki qız şagirdlərin sayına bərabərdir. Sinifdə neçə qız şagird var?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

52. 8 şagird içindən 5 nəfərlik bir qrup, bu qrup içindən əvvəlcə lider sonra lider köməyçisi neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?

A) 360 B) 560 C) 580 D) 1120 E) 1200

53. $B=\{1,2,3,4,5\}$ çoxluğunun elementlərindən istifadə edərək rəqəmləri fərqli olan neçə üç rəqəmli ədəd yazmaq olar?

A) 30 B) 45 C) 60 D) 75 E) 90

54. 8 nəfərlik şagird qrupundan 3 və 5 nəfərlik iki qrup düzəldilməlidir. Kənan ilə Kamran bir qrupda olmalıdırlarsa neçə fərqli qrup təşkil etmək olar?

A) 21 B) 22 C) 24 D) 25 E) 26

55. x şəhərindən y şəhərinə 3, y şəhərindən z şəhərinə 4 fərqli yol gedir. y şəhərindən keçmək şərti ilə z şəhərinə neçə müxtəlif üsulla getmək olar?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

56. Ana, ata və 4 uşaqdan ibarət olan bir ailə dairəvi masa ətrafında ana və ata yan – yana oturmaq şərti ilə neçə fərqli üsulda otura bilərlər?

A) 12 B) 24 C) 48 D) 52 E) 96

57. 3 məktub 6 poçt qutusuna, bir qutuya ən çox bir məktub atmaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla atıla bilər?

A) 70 B) 78 C) 90 D) 100 E) 120

58. Qələm qabında 2 sarı, 3 göy və 4 qırmızı rəngdə qələm var. Bu qələmlərdən fərqli rəngdə 2 qələm neçə fərqli üsulla seçilər?

A) 18 B) 26 C) 32 D) 34 E) 36

59. 6 fərqli kitabdan 3 dənəsi bir rəfə neçə fərqli üsulda qoyular?

A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

60. $A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ çoxluğunun elementlərindən istifadə edərək 300 ilə 800 arasında rəqəmləri fərqli olan neçə ədəd yazmaq olar?

A) 90 B) 100 C) 150 D) 200 E) 220

61. 4 mühəndis və 5 memar 4 – ü öndə 5 – i arxada və mühəndislər bir yerdə olmaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla düzülərlər?

A) $2 \cdot 4!5!$ B) $4!5!$ C) $3!5!$ D) $3 \cdot 4!5!$ E) $5!$

62. Aralarında Aydınında olduğu 10 nəfərlik basketbol qrupundan komandanın kapitanı və Aydın həmişə olmaq şərti ilə 5 nəfərlik komanda neçə fərqli üsulla seçilə bilər?

A) 27 B) 36 C) 56 D) 100 E) 110

63. İngilis, İspan və İtalyan dillərindən ən az birini bilənlərlə heç birini bilməyənlərdən təşkil olunan qrupda bu dillərin ən az ikisini bilənlərin sayı 12, ən çox birini bilənlərin sayı 7, ən çox ikisini bilənlər 11 – nəfərdir. Bu dillərin üçünüdə bilən neçə nəfərdi?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

64. Bir qrup insanlar içindən 42 – i alma, 54 – ü banan və 36 – ı çiyelek yemir. Ancaq alma və banan yeyən 80, çiyələk və alma yeyən 16, ancaq çiyələk yeyən neçə nəfərdi?

A) 10 B) 18 C) 24 D) 22 E) 20

65. 5 elementli alt çoxluqlarının sayı üç elementli altçoxluqların sayına bərabər olan çoxluğun neçə ədəd 2 elementli alt çoxluğu var?

A) 12 B) 14 C) 24 D) 28 E) 32

66. Qrupdakı 40 nəfərdən 18 – i şahmat oynaya bilir, 20 – i də nərd oynaya bilir. Qrupda həm şahmat həm də nərd oynaya bilməyən 10 nəfər olduğuna görə, hər ikisini oynaya bilən neçə nəfər var?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

67. Kursdakı şagirdlərin 70% – nə qələm, 40% – nə isə kitab verirlər. Həm qələm həm də kitab alan 12 şagird olduğuna görə, kursda qələm alan neçə nəfərdi?

A) 74 B) 80 C) 84 D) 92 E) 96

68. 34 şagirdin olduğu sinifdə 21 şagird kimya imtahanından kəsilir. 6 nəfər kimya imtahanından keçib riyaziyyatdan kəsilir, ikisindən keçən neçə nəfər şagird var?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

69. 32 nəfərlik sinifin şagirdləri futbol və basketbol oyunlarından ən az birini oynayırlar. Futbol oynayanların sayı basketbol oynayanların sayından 3 dəfə çoxdur. Hər iki oyunu oynayanların sayı ən çox neçədir?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

70. Bir sinifdə İngilis və ya Alman dillərindən ən az birini bilən 48 şagird var. İngiliscə bilənlərin sayı Almanca bilənlərin 2 misli, hər iki dili bilənlərin 6 misli qədərdi. Sinifdə Almanca bilənlərin sayı neçə nəfərdi?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

71. 20 nəfərlik bir sinifdə, qızların təşkil etdiyi ikili qrupların sayı oğlanların sayından 2 nəfər çoxdu. Qrupda neçə oğlan var?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

72. 7 nəfərin qatıldığı imtahan müvəffəqiyət baxımından neçə fərqli üsulla nəticələnər?

A) 128 B) 120 C) 96 D) 72 E) 64

73. 3 məktub 5 poçt qutusundan göndərilməlidir. Bir qutuya ən çox 1 məktub atılmaq şərti ilə, bu üç məktub neçə fərqli üsulla göndərilə bilər?

A) 15 B) 60 C) 81 D) 125 C) 243

74. Tətil üçün Antalya və İzmirə göndərmək üçün 6 nəfər tələbə seçilir. Hər iki şəhərə ən az 1 nəfər gedəcəyinə görə, bu 6 nəfər neçə fərqli qrup şəklində göndərilə bilər?

A) 30 B) 32 C) 62 D) 64 E) 66

75. Kamil və Cəmilənin də üzvü olduğu 7 nəfərlik qrup düz bir sırada düzülürlər. Kamil və Cəmilə yanaşı durmaq istəmirlərsə, neçə fərqli düzülüş alınar?

A) $2\cdot4!$ B) $6!$ C) $2\cdot6!$ D) $5\cdot6!$ E) $2\cdot7!$

76. Xətti olmayan 15 dənə nöqtədən ən çox neçə üçbucaq çəkmək olar?

A) 185 B) 215 C) 365 D) 455 E) 515

77. İçlərində Gülnar da olmaq şərti ilə 6 nəfər şəkil şəkdirmək istəyir. Gülnar nə başda nə də axırda olmaq istəmir buna görə neçə fərqli üsulda şəkil çəkdirmək olar?

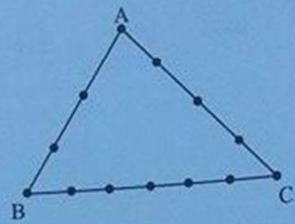
A) 480 B) 500 C) 520 D) 600 E) 720

78. Bir qrupda futbol oynamayanların sayı 13, basketbol oynamayanların sayı 23 – dür. Bunlardan ən çox birini oynayan 32 nəfər var. Ikisinidə bilməyən neçə nəfər var?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

LEARN İnformatics Magistratura Imtahanında sizlərə uğurlar arzu edir

79. Şəkildə verilmiş ABC üçbucağının tərəfləri üzərində 13 nöqtə verilmişdir. Təpə nöqtələri bu 13 nöqtədən üçü üzərində olan üçbucaqların sayını tapın.



A) 237 B) 250 C) 264 D) 280 E) 286

80. Futbol və basketbol oyunlarından ən az birini oynayanlardan ibarət qrupun 80% - i futbol, 40% - i basketbol oynayır. Sadəcə basketbol oynayanların sayı 15 olduğuna görə, bu qrupda cəmi neçə nəfər var idi?

A) 65 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

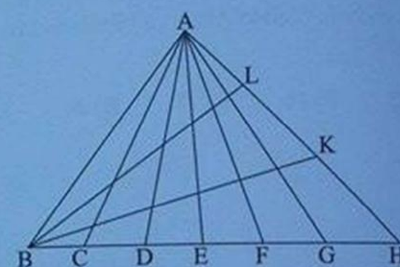
81. A məntəqəsindən B – yə 2 fərqli quru yol, B – dən C – yə 4 fərqli quru yol və A məntəqəsindən C – yə 2 fərqli hava yolu vardır. Buna görə, A – dan C – yə getmək istəyən bir nəfər neçə fərqli seçim edə bilər?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

82. A, B, C, D, E, F dərslərindən A və E dərsləri eyni saatda keçirilir. Bu altı dərsdən ikisini seçmək istəyən şagird neçə üsulla seçim edə bilər?

A) 15 B) 14 C) 13 D) 12 E) 11

83.



Şəkildə neçə fərqli üçbucaq vardır?

A) 36 B) 48 C) 65 D) 81 E) 96

1.	E	51.	E
2.	B	52.	D
3.	C	53.	C
4.	E	54.	E
5.	A	55.	D
6.	E	56.	C
7.	A	57.	E
8.	C	58.	B
9.	C	59.	A
10.	B	60.	C
11.	A	61.	A
12.	B	62.	C
13.	D	63.	C
14.	A	64.	E
15.	E	65.	D
16.	B	66.	C
17.	D	67.	C
18.	E	68.	A
19.	C	69.	D
20.	E	70.	C
21.	E	71.	D
22.	B	72.	A
23.	A	73.	B
24.	E	74.	C
25.	D	75.	D
26.	A	76.	D
27.	B	77.	A
28.	C	78.	B
29.	E	79.	A
30.	A	80.	C
31.	B	81.	B
32.	B	82.	B
33.	D	83.	D
34.	D		
35.	D		
36.	E		
37.	B		
38.	C		
39.	E		
40.	B		
41.	E		
42.	C		
43.	D		
44.	D		
45.	D		
46.	D		
47.	B		
48.	E		
49.	A		
50.	B		